Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. Simon Blatt

WS 2012/13

# Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

## 16. Übungsblatt

### Aufgabe 74

**a)** Hier kann man die Regel von de l'Hospital zweimal anwenden (jeweils „$\frac{\infty}{\infty}$“ und die Ableitung des Nenners ist für hinreichend große $x$ ungleich 0). Dies führt auf

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \qquad \text{(falls die Grenzwerte existieren)},$$

hilft also nicht, den Grenzwert zu berechnen. Einfaches Kürzen mit $e^x$ liefert aber

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = \frac{1-0}{1+0} = 1\,.$$

**b)** Auch hier wenden wir zweimal hintereinander die Regel von de l'Hospital an (jeweils für „$\frac{0}{0}$“; die Ableitung des Nenners hat in der Nähe von 1 keine Nullstellen). Wegen $(x^x)' = (e^{x\ln x})' = x^x(x\ln x)' = x^x(1+\ln x)$ ergibt sich

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^x-x}{1-x+\ln x} = \lim_{x\to 1}\frac{x^x(1+\ln x)-1}{-1+\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1}\frac{x^x(1+\ln x)^2+x^x\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{1+1}{-1} = -2\,.$$

**c)** Wir versuchen, ob wir die Regeln von de l'Hospital anwenden können. Hier konvergieren Zähler und Nenner gegen 0, die Ableitung des Nenners ist in der Nähe von 0 ungleich 0, aber

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x^2\cos(1/x))'}{(\sin x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\cos(1/x)-x^2\sin(1/x)(-\frac{1}{x^2})}{\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\cos(1/x)+\sin(1/x)}{\cos x}$$

existiert nicht, denn für $x_n := ((n+\frac{1}{2})\pi)^{-1}$ hat der Bruch den Wert $(-1)^n/\cos x_n$. Die Regel von de l'Hospital ist nicht anwendbar; der ursprüngliche Grenzwert existiert aber:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos(1/x)}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot x\cos(1/x) = 1\cdot 0 = 0\,.$$

**d)** Zu untersuchen ist hier $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x)$ für $f(x) := \int_0^x e^{t^2}\,dt$ und $g(x) := x^{-1}e^{x^2}$. Wir wenden die Regel von de l'Hospital an: Der zu untersuchende Grenzwert ist vom Typ „$\frac{\infty}{\infty}$“ (Beachte: für $x \geqslant 0$ gilt $f(x) \geqslant \int_0^x 1\,dt = x$) und wegen

$$f'(x) = e^{x^2}, \qquad g'(x) = -x^{-2}e^{x^2} + x^{-1}e^{x^2}\cdot 2x = (2-x^{-2})e^{x^2}$$

gilt: Die Ableitung des Nenners ist für hinreichend große $x$ stets $\neq 0$ und der Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^2}}{(2-x^{-2})e^{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2-x^{-2}} = \frac{1}{2}$$

existiert. Folglich ist auch der zu untersuchende Grenzwert $\frac{1}{2}$.

**e)** Sowohl $f(x)$ als auch $g(x)$ streben für $x \to \infty$ gegen $\infty$. Als Ableitungen erhalten wir $f'(x) = 1 + \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x$ und

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x)e^{\sin x} + f(x)e^{\sin x}\cos x = e^{\sin x}(2\cos^2 x + x\cos x + \sin x \cos^2 x) \\ &= e^{\sin x}\cos x\,(2\cos x + x + \sin x \cos x)\,. \end{aligned}$$

Also wird $g'(x)$ auch für beliebig große $x$ durch den Faktor $\cos x$ immer wieder 0. Daher ist die Regel von de l'Hospital nicht anwendbar. Der Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{e^{\sin x}}$$

existiert nicht (Betrachte z.B. $x_n := (n + \frac{1}{2})\pi$), obwohl für jene $x$, für die $g'(x) \neq 0$ ist, gilt:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2\cos x}{e^{\sin x}(2\cos x + x + \sin x \cos x)} \xrightarrow{x\to\infty} 0\,.$$

## Aufgabe 75

**a)** Die durch $f(x) := \ln(1+x)$ definierte Funktion $f\colon (-1,\infty) \to \mathbb{R}$ ist beliebig oft differenzierbar. Wegen

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}\,, \qquad f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}\,, \qquad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}\,, \qquad f''''(x) = \frac{-6}{(1+x)^4}\,,$$
$$f^{(5)}(x) = \frac{24}{(1+x)^5}$$

sind

$$f(0) = 0\,, \qquad f'(0) = 1\,, \qquad f''(0) = -1\,, \qquad f'''(0) = 2\,, \qquad f''''(0) = -6$$

und für das Taylorpolynom $T_4(f;0)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} T_4(f;0)(x) &= \sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k = 0 + x + \tfrac{1}{2!}\,(-1)x^2 + \tfrac{1}{3!}\,2x^3 + \tfrac{1}{4!}\,(-6)x^4 \\ &= x - \tfrac{1}{2}\,x^2 + \tfrac{1}{3}\,x^3 - \tfrac{1}{4}\,x^4\,. \end{aligned}$$

Sei $x \geqslant 0$. Um die Abschätzung $0 \leqslant \ln(1+x) - T_4(f;0)(x) \leqslant \frac{1}{5}\,x^5$ zu zeigen, verwenden wir den Satz von Taylor. Dieser besagt, dass es ein $\xi$ zwischen 0 und $x$ gibt mit

$$f(x) = T_4(f;0)(x) + \frac{f^{(4+1)}(\xi)}{(4+1)!}\,(x-0)^{4+1}\,,$$

also mit

$$f(x) - T_4(f;0)(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\,x^5\,.$$

Somit reicht es, die Abschätzung $0 \leqslant \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\,x^5 \leqslant \frac{1}{5}\,x^5$ einzusehen. Diese ist erfüllt, denn:

$$\begin{aligned} \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\,x^5 &= \frac{1}{5!}\cdot\frac{24}{(1+\xi)^5}\,x^5 \geqslant 0\,, \\ \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\,x^5 &= \frac{1}{5!}\cdot\frac{24}{(1+\xi)^5}\,x^5 \leqslant \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(1+0)^5}\,x^5 = \frac{1}{5}\,x^5\,. \end{aligned}$$

**b)** Für die durch $f(x) := \ln(2+x)$ gegebene Funktion $f\colon (-2,\infty) \to \mathbb{R}$, die beliebig oft differenzierbar ist, gilt

$$f'(x) = \frac{1}{2+x}\,, \qquad f''(x) = -\frac{1}{(2+x)^2}\,.$$

Also haben wir $f(0) = \ln 2$ und $f'(0) = \frac{1}{2}$. Nach dem Satz von Taylor gibt es zu jedem $x \in [-1,1]$ ein $\xi$ zwischen 0 und $x$ mit

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2!}\,x^2 = \ln 2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2(2+\xi)^2}\,.$$

Daher gilt wegen $\xi \in [-1,1]$

$$\left| f(x) - \ln 2 - \frac{x}{2} \right| = \left| \frac{x^2}{2(2+\xi)^2} \right| \leqslant \frac{x^2}{2(2-1)^2} = \frac{x^2}{2}\,.$$

Wir können somit $a = \ln 2$ und $b = c = \frac{1}{2}$ wählen.

**c)** Die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{-x} + \frac{1}{1+x}$ ist beliebig oft differenzierbar mit

$$f'(x) = -e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^2}\,, \qquad f''(x) = e^{-x} + \frac{2}{(1+x)^3}\,, \qquad f'''(x) = -e^{-x} - \frac{6}{(1+x)^4}\,.$$

Daher sind

$$f(\tfrac{1}{2}) = e^{-1/2} + \tfrac{2}{3}\,, \qquad f'(\tfrac{1}{2}) = -e^{-1/2} - \tfrac{4}{9}\,, \qquad f''(\tfrac{1}{2}) = e^{-1/2} + 2 \cdot \tfrac{8}{27} = e^{-1/2} + \tfrac{16}{27}$$

und das Taylorpolynom $T_2(f;\frac{1}{2})$ lautet

$$\begin{aligned} T_2(f;\tfrac{1}{2})(x) &= \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(\frac{1}{2})}{k!}(x-\tfrac{1}{2})^k = f(\tfrac{1}{2}) + f'(\tfrac{1}{2})(x-\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}f''(\tfrac{1}{2})(x-\tfrac{1}{2})^2 \\ &= e^{-1/2} + \tfrac{2}{3} + (-e^{-1/2} - \tfrac{4}{9})(x-\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}(e^{-1/2} + \tfrac{16}{27})(x-\tfrac{1}{2})^2\,. \end{aligned}$$

Sei $x \in [0,1]$. Nach dem Satz von Taylor existiert ein $\xi$ zwischen $\frac{1}{2}$ und $x$ mit

$$f(x) = T_2(f;\tfrac{1}{2})(x) + \frac{f^{(2+1)}(\xi)}{(2+1)!}(x-\tfrac{1}{2})^{2+1}\,,$$

also mit

$$\left| f(x) - T_2(f;\tfrac{1}{2})(x) \right| = \frac{|f'''(\xi)|}{3!}\,|x-\tfrac{1}{2}|^3\,.$$

Wegen $\xi \geqslant 0$ ergibt sich

$$\frac{|f'''(\xi)|}{3!} = \frac{1}{6}\Big(e^{-\xi} + \frac{6}{(1+\xi)^4}\Big) = \frac{e^{-\xi}}{6} + \frac{1}{(1+\xi)^4} \leqslant \frac{1}{6} + \frac{1}{(1+0)^4} = \frac{7}{6}\,;$$

demnach gilt die gewünschte Abschätzung z.B. mit $C = \frac{7}{6}$.

**Viel Erfolg bei der Klausur und danach schöne Semesterferien!**