Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. S. Wugalter

WS 2013/14

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 1. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Um den ersten Teil einzusehen, betrachten wir eine Wahrheitstafel:

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$
w	w	w	f	f	f	f
w	f	w	f	f	w	f
f	w	w	f	w	f	f
f	f	f	w	w	w	w

Die vierte und die siebte Spalte sind gleich; die entsprechenden Aussagen haben also unabhängig von den Wahrheitswerten von A und B stets den gleichen Wahrheitswert, und damit ist $\neg(A \vee B) \;\Leftrightarrow\; (\neg A) \wedge (\neg B)$ bewiesen.

Nun zum zweiten Teil: Dabei benutzen wir, dass $D \;\Leftrightarrow\; \neg\neg D$ für jede Aussage D gilt (siehe Abschnitt 1.3 der Vorlesung). Wir erhalten

$$\neg A \vee \neg B \;\Leftrightarrow\; \neg\neg(\neg A \vee \neg B).$$

(Um Klammern zu sparen, schreiben wir hier $\neg A \vee \neg B$ statt $(\neg A) \vee (\neg B)$; auch im folgenden lassen wir solche Klammern im Zusammenhang mit $\neg$ weg.) Aufgrund des schon bewiesenen Teils können wir ein $\neg$ „in die Klammer hineinziehen“:

$$\neg\neg(\neg A \vee \neg B) \;\Leftrightarrow\; \neg(\neg\neg A \wedge \neg\neg B) \;\Leftrightarrow\; \neg(A \wedge B).$$

Damit ist auch der zweite Teil der Behauptung gezeigt.

Es sei A die Aussage „Ich bin dick“ und B die Aussage „Ich bin glücklich“. Dann haben wir gezeigt, dass die Negation der Aussage „Ich bin dick oder glücklich“ lautet: „Ich bin dünn und unglücklich“. Und wir haben gezeigt, dass die Negation der Aussage „Ich bin dick und glücklich“ lautet: „Ich bin dünn oder unglücklich“.

b) Den ersten Teil der Behauptung liefert die folgende Wahrheitstafel:

A	B	C	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	w	w	f	w
w	f	w	w	w	f	w	w
w	f	f	f	f	f	f	f
f	w	w	w	f	f	f	f
f	w	f	w	f	f	f	f
f	f	w	w	f	f	f	f
f	f	f	f	f	f	f	f

Den zweiten Teil zeigen wir mit der gleichen Methode wie eben: Wir verwenden $D = \neg\neg D$ und das in **a)** und **b)** schon Bewiesene.

$$\begin{aligned} A \vee (B \wedge C) &\Leftrightarrow \neg\neg\big(A \vee (B \wedge C)\big) \overset{\textbf{a)}}{\Leftrightarrow} \neg\big(\neg A \wedge \neg(B \wedge C)\big) \overset{\textbf{a)}}{\Leftrightarrow} \neg\big(\neg A \wedge (\neg B \vee \neg C)\big) \\ &\overset{\textbf{b)}}{\Leftrightarrow} \neg\big((\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge \neg C)\big) \overset{\textbf{a)}}{\Leftrightarrow} \neg(\neg A \wedge \neg B) \wedge \neg(\neg A \wedge \neg C) \\ &\overset{\textbf{a)}}{\Leftrightarrow} (A \vee B) \wedge (A \vee C) \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt: „Das Wetter ist schön und ich bin dick oder glücklich“ ist genau dann wahr, wenn „Das Wetter ist schön und ich bin dick“ oder „Das Wetter ist schön und ich bin glücklich“ wahr ist. Und: „Das Wetter ist schön oder ich bin dick und glücklich“ ist genau dann wahr, wenn „Das Wetter ist schön oder ich bin dick“ und „Das Wetter ist schön oder ich bin glücklich“ wahr ist.

c) Wir stellen eine Wahrheitstafel auf (die Tafel für $\Leftrightarrow$ ist aus der Vorlesung bekannt):

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$A \wedge B$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$	$(A \wedge B) \vee \big((\neg A) \wedge (\neg B)\big)$
w	w	w	w	f	f	f	w
w	f	f	f	f	w	f	f
f	w	f	f	w	f	f	f
f	f	w	f	w	w	w	w

Aufgabe 2

a) Die Aussage „Alle Karlsruher fahren mit dem Fahrrad und der Straßenbahn“ entsteht aus den beiden Teilaussagen

A : „Alle Karlsruher fahren mit dem Fahrrad.“
B : „Alle Karlsruher fahren mit der Straßenbahn.“

mittels der logischen Verknüpfung $\wedge$ (und). Negation ergibt

$$\neg(A \wedge B) \;\Leftrightarrow\; (\neg A) \vee (\neg B),$$

also lautet die Negation obiger Aussage

„Es gibt einen Karlsruher, der nicht mit dem Fahrrad fährt,
oder es gibt einen Karlsruher, der nicht mit der Straßenbahn fährt“

bzw. kurz

„Es gibt einen Karlsruher, der nicht mit dem Fahrrad oder nicht mit der Straßenbahn fährt“.

b) Betrachten wir die drei Aussagen

A : „Im Kino läuft Herr der Ringe“,
B : „Im Kino läuft James Bond“,
C : „Ich gehe ins Kino“,

dann entspricht die Aussage „Ich gehe immer ins Kino, wenn Herr der Ringe oder James Bond laufen“: $(A \vee B) \Rightarrow C$. Wegen $(E \Rightarrow C) \;\Leftrightarrow\; (\neg E \vee C)$ ist

$$\neg\big((\underbrace{A \vee B}_{=E}) \Rightarrow C\big) \quad\Leftrightarrow\quad \neg\big(\neg(\underbrace{A \vee B}_{=E}) \vee C\big) \quad\Leftrightarrow\quad \big((A \vee B) \wedge \neg C\big).$$

In Worten: „Im Kino lief ein Herr der Ringe- oder ein James Bond-Film, und ich bin (dennoch) nicht ins Kino gegangen“.

c) Es sei A die Aussage „Morgen ist schönes Wetter“ und B die Aussage „Alle Studierenden gehen in den Schlossgarten“, dann müssen wir $A \Rightarrow B$ verneinen. Es gilt:

$$\neg(A \Rightarrow B) \;\Leftrightarrow\; \neg\big((\neg A) \vee B\big) \;\Leftrightarrow\; \big(\neg(\neg A) \wedge (\neg B)\big) \;\Leftrightarrow\; A \wedge (\neg B).$$

Somit lautet die Negation des Satzes: „Morgen ist schönes Wetter, und es gibt einen Studierenden, der nicht in den Schlossgarten geht“.

d) Wir wollen $\exists x$ mit $A(x)$: $B(x)$ negieren, wobei die Aussageformen $A(x)$ und $B(x)$ durch

$$\begin{aligned} &A(x) : \text{„}x \text{ ist ein Mensch.“} \\ &B(x) : \text{„Mathematik macht } x \text{ keinen Spaß.“} \end{aligned}$$

gegeben sind. Wegen $\neg\big(\exists x$ mit $A(x)$: $B(x)\big) \;\Leftrightarrow\; \big(\forall x$ mit $A(x)$: $\neg B(x)\big)$ ist die Negation der ursprünglichen Aussage: „Allen Menschen macht Mathematik Spaß“.

Aufgabe 3

a) Die Menge all derer, die in Karlsruhe im ersten Hochschulsemester sind und Physik studieren, lässt sich ausdrücken durch

$$\big\{x \,:\, x \in S_1 \wedge x \in P\big\} = S_1 \cap P.$$

b) Die Menge aller Karlsruher Studierenden, die im ersten oder dritten Hochschulsemester sind, aber nicht Elektrotechnik studieren, ist gleich

$$\big\{x \,:\, (x \in S_1 \vee x \in S_3) \wedge x \notin E\big\} = \big\{x \,:\, x \in S_1 \cup S_3 \wedge x \notin E\big\} = (S_1 \cup S_3) \setminus E.$$

c) Die Menge aller Studierenden in Karlsruhe entspricht

$$\big\{x \,:\, x \in S_1 \vee x \in S_2 \vee x \in S_3 \vee x \in S_4 \vee \ldots\big\} = \big\{x \,:\, \exists j \in \mathbb{N} : x \in S_j\big\} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} S_j.$$

Aufgabe 4

Gegeben seien eine Menge M sowie Teilmengen M_1, M_2, M_3 von M.

a) Um die Äquivalenz $M_1 \subset M_2 \;\Leftrightarrow\; M \setminus M_2 \subset M \setminus M_1$ zu zeigen, weisen wir die Gültigkeit der Implikationen $M_1 \subset M_2 \;\Rightarrow\; M \setminus M_2 \subset M \setminus M_1$ und $M_1 \subset M_2 \;\Leftarrow\; M \setminus M_2 \subset M \setminus M_1$ nach.

„$\Rightarrow$“: Es gelte $M_1 \subset M_2$, sei also jedes Element von M_1 auch in M_2 enthalten. Wir müssen nun zeigen: $M \setminus M_2 \subset M \setminus M_1$ (bzw. in Worten: Jedes Element von M, das nicht in M_2 liegt, liegt auch nicht in M_1.)
Jedes Element der Menge $M \setminus M_2$ ist nicht in M_2 und damit erst recht nicht in M_1; folglich liegt es in $M \setminus M_1$. Also gilt $M \setminus M_2 \subset M \setminus M_1$.

„$\Leftarrow$“: Es gelte $M \setminus M_2 \subset M \setminus M_1$. Zu zeigen ist $M_1 \subset M_2$.
Nach der Voraussetzung $M \setminus M_2 \subset M \setminus M_1$ liegt jedes Element von M, das nicht in M_2 liegt, auch nicht in M_1. Dann ist notwendigerweise jedes Element von M_1 auch in M_2, da es ja sonst nicht in M_1 liegen würde. Also ist $M_1 \subset M_2$.

b) Es gelte $M_1 \subset M_2$ und $M_2 \subset M_3$. Um $M_1 \subset M_3$ zu zeigen, müssen wir begründen, warum jedes Element aus M_1 auch in M_3 liegt. Sei hierzu $x \in M_1$ beliebig. Wegen $M_1 \subset M_2$ liegt x auch in M_2 und aufgrund von $M_2 \subset M_3$ ist x auch in M_3 enthalten.

Da $x \in M_1$ beliebig war, haben wir eingesehen, dass jedes Element aus M_1 ebenfalls in M_3 liegt, d.h. $M_1 \subset M_3$.

c) Die Äquivalenz der drei Aussagen i), ii), iii) erhalten wir am geschicktesten aus der Implikationskette „i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) $\Rightarrow$ i)“.

„i) $\Rightarrow$ ii)“: Es gelte $M_1 \subset M_2$. Um nun die Gleichheit der beiden Mengen $M_1 \cap M_2$ und M_1 zu zeigen, brauchen wir nur die eine Inklusion $M_1 \subset M_1 \cap M_2$ einzusehen (die umgekehrte Inklusion gilt ohnehin). Sei dazu $x \in M_1$. Wegen $M_1 \subset M_2$ ist auch $x \in M_2$. Dann ist aber x sowohl in M_1 als auch in M_2, also in $M_1 \cap M_2$.

„ii) $\Rightarrow$ iii)“: Hier müssen wir unter der Voraussetzung $M_1 \cap M_2 = M_1$ nur die Inklusion $M_1 \cup M_2 \subset M_2$ nachweisen. Sei also $x \in M_1 \cup M_2$. Ist $x \in M_2$, so ist nichts zu zeigen. Ist $x \in M_1 = M_1 \cap M_2$, so ist $x \in M_2$, was zu zeigen war.

„iii) $\Rightarrow$ i)“: Sei hierzu $x \in M_1$. Dann ist jedenfalls $x \in M_1 \cup M_2 = M_2$.