Karlsruhe Institut für Technologie (KIT) WS 2013/14
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. S. Wugalter

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 3. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Induktionsanfang (IA): Für $n = 1$ stimmt die Behauptung, denn beide Seiten der Gleichung ergeben dann 1: $\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$.

Induktionsschluss (IS): Es sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ (Induktionsvoraussetzung, kurz: IV). Dann folgt

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \overset{\text{IV}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)(\tfrac{1}{2}n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}.$$

b) IA: Für $n = 1$ ist $\prod_{k=1}^{1}(1+\frac{1}{k})^k = (1+\frac{1}{1})^1 = 2 = \frac{2^2}{2} = \frac{(1+1)^{1+1}}{(1+1)!}$.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte $\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})^k = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$ (IV). Dann gilt:

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n+1}\Big(1+\frac{1}{k}\Big)^k &= \Big(\prod_{k=1}^{n}\Big(1+\frac{1}{k}\Big)^k\Big)\cdot\Big(1+\frac{1}{n+1}\Big)^{n+1} \overset{\text{IV}}{=} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\Big(\frac{n+1}{n+1}+\frac{1}{n+1}\Big)^{n+1}\\ &= \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n+2}{n+2} = \frac{(n+2)^{n+2}}{(n+2)!}\\ &= \frac{((n+1)+1)^{(n+1)+1}}{((n+1)+1)!}.\end{aligned}$$

c) IA: Für $n = 1$ stimmt die behauptete Aussage, denn $6^1 - 5\cdot 1 + 4 = 5$ ist durch 5 teilbar.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte die Behauptung, sei also $6^n - 5n + 4$ durch 5 teilbar, etwa $6^n - 5n + 4 = 5l$ für ein $l \in \mathbb{Z}$. (IV)

Zu zeigen ist, dass dann auch $6^{n+1} - 5(n+1) + 4$ durch 5 teilbar ist. Es gilt:

$$\begin{aligned}6^{n+1} - 5(n+1) + 4 &= 6\cdot 6^n - 5n - 5 + 4 = 6\big(6^n - 5n + 4\big) + 25n - 25\\ &\overset{\text{IV}}{=} 6\cdot 5l + 25n - 25 = (\underbrace{6\cdot l + 5n - 5}_{\in\mathbb{Z}})\cdot 5.\end{aligned}$$

Aufgabe 2

a) Wir beweisen die behauptete Identität durch vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N}$.

IA: Für $n = 1$ gilt $\sum_{k=0}^{0} q^k = q^0 = 1 = \frac{1-q^1}{1-q}$ für alle $q \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte $\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$ für alle $q \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$. (IV)

Für jedes $q \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$ ergibt sich damit

$$\sum_{k=0}^{(n+1)-1} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n-1} q^k + q^n \overset{\text{IV}}{=} \frac{1-q^n}{1-q} + q^n\cdot\frac{1-q}{1-q} = \frac{1-q^n+q^n-q^n\cdot q}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Sind $w \neq z$ und $z \neq 0$, so setzen wir $q := \frac{w}{z}$. Dann ist $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ und laut a) gilt

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} \Big(\frac{w}{z}\Big)^k = \frac{1-(\frac{w}{z})^n}{1-\frac{w}{z}} \quad &\Leftrightarrow \quad \Big(1-\frac{w}{z}\Big) \sum_{k=0}^{n-1} \Big(\frac{w}{z}\Big)^k = 1 - \Big(\frac{w}{z}\Big)^n \\
&\overset{|\cdot z^n (\neq 0!)}{\Leftrightarrow} \quad z\Big(1-\frac{w}{z}\Big)\, z^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} z^{-k} w^k = z^n - w^n \\
&\Leftrightarrow \quad (z-w) \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} w^k = z^n - w^n.
\end{aligned}
$$

Im Fall $w = z$ lautet die behauptete Gleichung $0 = 0$, diese ist offensichtlich wahr.

Wegen

$$
\sum_{k=0}^{n-1} 0^{n-1-k} w^k = \sum_{k=0}^{n-2} \underbrace{0^{n-1-k}}_{=0, \text{ da } n-1-k \geqslant 1} w^k + 0^{n-1-(n-1)} w^{n-1} = 0^0 w^{n-1} = w^{n-1}
$$

ist die Gleichung im Fall $z = 0$

$$
(0-w) \sum_{k=0}^{n-1} 0^{n-1-k} w^k = -w \cdot w^{n-1} = -w^n = 0 - w^n
$$

ebenfalls für jedes $w \in \mathbb{C}$ erfüllt.

c) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ folgt mit der geometrischen Summenformel

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{i}{2}\Big)^k &\overset{l:=k-1}{=} \sum_{l=0}^{n-1} \Big(\frac{i}{2}\Big)^{l+1} = \frac{i}{2} \sum_{l=0}^{n-1} \Big(\frac{i}{2}\Big)^l \overset{\text{a)}}{=} \frac{i}{2} \cdot \frac{1-(i/2)^n}{1-i/2} \cdot \frac{1+i/2}{1+i/2} \\
&= \frac{i}{2} \cdot \frac{1-(i/2)^n + i/2 - (i/2)^{n+1}}{1-i^2/4} = \frac{i}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \Big(1-(i/2)^n + i/2 - (i/2)^{n+1}\Big) \\
&= \frac{2}{5}\, i \Big(1+i/2\Big) + \frac{2}{5}\, i \Big(-(i/2)^n - (i/2)^{n+1}\Big) = \frac{2}{5}\, i - \frac{1}{5} + \frac{2}{5}\, i \Big(-1-i/2\Big)(i/2)^n \\
&= \frac{2}{5}\, i - \frac{1}{5} + \Big(-\frac{2}{5}\, i + \frac{1}{5}\Big) \frac{i^n}{2^n}.
\end{aligned}
$$

Nun seien $m \in \mathbb{N}_0$ und $r \in \{0,1,2,3\}$ mit $n = 4m + r$. Dann gilt

$$
i^n = i^{4m+r} = i^{4m} \cdot i^r = (i^4)^m \cdot i^r = 1^m \cdot i^r = i^r
$$

und damit

$$
\sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{i}{2}\Big)^k = \frac{2}{5}\, i - \frac{1}{5} + \Big(-\frac{2}{5}\, i + \frac{1}{5}\Big) \frac{i^r}{2^n}.
$$

Für $r = 0$ (also, falls n durch 4 teilbar ist) gilt

$$
\sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{i}{2}\Big)^k = \frac{2}{5}\, i - \frac{1}{5} + \Big(-\frac{2}{5}\, i + \frac{1}{5}\Big) \frac{1}{2^n} = -\frac{1}{5} + \frac{1}{5 \cdot 2^n} + i \Big(\frac{2}{5} - \frac{1}{5 \cdot 2^{n-1}}\Big).
$$

Für $r = 1$ (also, falls n durch 4 mit Rest 1 teilbar ist) gilt

$$
\sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{i}{2}\Big)^k = \frac{2}{5}\, i - \frac{1}{5} + \Big(-\frac{2}{5}\, i + \frac{1}{5}\Big) \frac{i}{2^n} = -\frac{1}{5} + \frac{1}{5 \cdot 2^{n-1}} + i \Big(\frac{2}{5} + \frac{1}{5 \cdot 2^n}\Big).
$$

Für $r = 2$ (also, falls n durch 4 mit Rest 2 teilbar ist) gilt

$$
\sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{i}{2}\Big)^k = \frac{2}{5}\, i - \frac{1}{5} + \Big(-\frac{2}{5}\, i + \frac{1}{5}\Big) \frac{-1}{2^n} = -\frac{1}{5} - \frac{1}{5 \cdot 2^n} + i \Big(\frac{2}{5} + \frac{1}{5 \cdot 2^{n-1}}\Big).
$$

Für $r = 3$ (also, falls n durch 4 mit Rest 3 teilbar ist) gilt

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{i}{2}\right)^k = \frac{2}{5}i - \frac{1}{5} + \left(-\frac{2}{5}i + \frac{1}{5}\right)\frac{-i}{2^n} = -\frac{1}{5} - \frac{1}{5\cdot 2^{n-1}} + i\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5\cdot 2^n}\right).$$

Wir lesen ab:

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{i}{2}\right)^k\right) = \begin{cases} -\frac{1}{5} + \frac{1}{5\cdot 2^n}\,, & \text{falls } n \text{ durch 4 teilbar ist} \\ -\frac{1}{5} + \frac{1}{5\cdot 2^{n-1}}, & \text{falls } n \text{ durch 4 mit Rest 1 teilbar ist} \\ -\frac{1}{5} - \frac{1}{5\cdot 2^n}\,, & \text{falls } n \text{ durch 4 mit Rest 2 teilbar ist} \\ -\frac{1}{5} - \frac{1}{5\cdot 2^{n-1}}, & \text{falls } n \text{ durch 4 mit Rest 3 teilbar ist} \end{cases}$$

$$\operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{i}{2}\right)^k\right) = \begin{cases} \frac{2}{5} - \frac{1}{5\cdot 2^{n-1}}, & \text{falls } n \text{ durch 4 teilbar ist} \\ \frac{2}{5} + \frac{1}{5\cdot 2^n}\,, & \text{falls } n \text{ durch 4 mit Rest 1 teilbar ist} \\ \frac{2}{5} + \frac{1}{5\cdot 2^{n-1}}, & \text{falls } n \text{ durch 4 mit Rest 2 teilbar ist} \\ \frac{2}{5} - \frac{1}{5\cdot 2^n}\,, & \text{falls } n \text{ durch 4 mit Rest 3 teilbar ist} \end{cases}$$

Aufgabe 3

Wir bemerken zunächst, dass die Ungleichung $x \leqslant 4 + \sqrt{x-2}$ nur für $x \geqslant 2$ sinnvoll ist. Es gilt

$$x \leqslant 4 + \sqrt{x-2} \quad \Leftrightarrow \quad x - 4 \leqslant \sqrt{x-2}.$$

Im Fall $x \geqslant 4$ ist dies nach Aufgabe 3 äquivalent zu (man beachte $x - 4 \geqslant 0$)

$$\begin{aligned}(x-4)^2 \leqslant x-2 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 - 8x + 16 \leqslant x - 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 9x + 18 \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-3)(x-6) \leqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \big(x - 3 \leqslant 0 \text{ und } x - 6 \geqslant 0\big) \text{ oder } \big(x - 3 \geqslant 0 \text{ und } x - 6 \leqslant 0\big) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in [3, 6].\end{aligned}$$

Da wir nur $x \geqslant 4$ betrachtet haben, gilt $x \leqslant 4 + \sqrt{x-2}$ in diesem Fall genau für $x \in [4, 6]$.
Für jedes $x \in [2, 4)$ gilt $x - 4 < 0$ und, da die Wurzel nach Definition nichtnegativ ist, genügt jedes $x \in [2, 4)$ der Ungleichung $x - 4 < 0 \leqslant \sqrt{x-2}$ und somit auch $x \leqslant 4 + \sqrt{x-2}$.
Insgesamt haben wir

$$x \leqslant 4 + \sqrt{x-2} \quad \Leftrightarrow \quad x \in [2, 6].$$

Aufgabe 4

a) Es gilt: $z^3 = (3-i)^3 = (3-i)(9-6i+i^2) = (3-i)(8-6i) = 24 - 18i - 8i + 6i^2 = 18 - 26i$. Folglich hat z^3 den Realteil 18 und den Imaginärteil -26. Ferner ist $|z^3| = \sqrt{18^2 + (-26)^2} = \sqrt{1000} = 10\sqrt{10}$. Alternativ kann man $|z^3|$ auch berechnen, ohne z^3 bestimmt zu haben: $|z^3| = |z|^3 = \sqrt{3^2 + (-1)^2}^3 = \sqrt{10}^3 = 10\sqrt{10}$.

b) Wir erweitern den Bruch geeignet (Standardtrick: $z\bar{z}$ ist reell, daher ergibt $1/z = 1/z \cdot \bar{z}/\bar{z} = \bar{z}/(z\bar{z})$ einen reellen Nenner):

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{3-i} = \frac{1}{3-i}\cdot\frac{3+i}{3+i} = \frac{3+i}{3^2 - i^2} = \frac{3+i}{10} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10}i.$$

Also hat $1/z$ den Realteil $\frac{3}{10}$ und den Imaginärteil $\frac{1}{10}$. Der Betrag von $1/z$ ist $|1/z| = \sqrt{\frac{9}{100} + \frac{1}{100}} = \sqrt{1/10} = \sqrt{10}/10$, alternativ: $|1/z| = 1/|z| = 1/\sqrt{10} = \sqrt{10}/10$.

c) Es ergibt sich $z \cdot w = (3-i)(-1+2i) = -3 + 6i + i - 2i^2 = -1 + 7i$. Also hat $z \cdot w$ Realteil -1 und Imaginärteil 7. Außerdem gilt $|z \cdot w| = \sqrt{1 + 49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} = |z| \cdot |w|$.

d) Es ist $\bar{z}^2 = \big(\overline{3-i}\big)^2 = (3+i)^2 = 9 + 6i + i^2 = 8 + 6i$ und wegen $w^2 = (-1+2i)^2 = 1 - 4i + 4i^2 = -3 - 4i$ ergibt sich

$$\frac{1}{w^2} = \frac{1}{-3-4i}\cdot\frac{-3+4i}{-3+4i} = \frac{-3+4i}{9 - 16i^2} = \frac{-3+4i}{25} = -\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i.$$

$\bar{z}^2 + 1/w^2 = (8+6i) + (-\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i)$ hat somit Realteil $8 - \frac{3}{25} = \frac{197}{25}$ und Imaginärteil $6 + \frac{4}{25} = \frac{154}{25}$.
Der Betrag von $\bar{z}^2 + 1/w^2$ lautet $|\bar{z}^2 + 1/w^2| = \sqrt{197^2 + 154^2}/25 = \sqrt{2501}/5$.

Aufgabe 5

a) Es gilt $z^2 - 2z + 3 = (z-1)^2 + 2$. Die Gleichung $z^2 - 2z + 3 = 0$ ist also genau dann erfüllt, wenn $(z-1)^2 = -2$. Dies bedeutet $z - 1 = i\sqrt{2}$ oder $z - 1 = -i\sqrt{2}$, also hat die Gleichung die zwei Lösungen $z_1 = 1 + i\sqrt{2}$ und $z_2 = 1 - i\sqrt{2}$.

b) Mit dem Ansatz $z = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ erhalten wir

$$\begin{aligned} z^2 = |z|^2 \quad &\Leftrightarrow \quad a^2 + 2aib + (ib)^2 = a^2 + b^2 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + 2aib - b^2 = a^2 + b^2 \\ &\overset{(*)}{\Leftrightarrow} \quad a^2 - b^2 = a^2 + b^2 \text{ und } 2ab = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -2b^2 = 0 \text{ und } \big(a = 0 \text{ oder } b = 0\big) \\ &\Leftrightarrow \quad b = 0 \text{ und } \big(a = 0 \text{ oder } b = 0\big) \\ &\Leftrightarrow \quad b = 0. \end{aligned}$$

[In $(*)$ verwenden wir, dass zwei komplexe Zahlen genau dann gleich sind, wenn sie den selben Real- und Imaginärteil besitzen.]
Also ist $z^2 = |z|^2$ genau dann erfüllt, wenn $\mathrm{Im}(z) = 0$ bzw. $z \in \mathbb{R}$ ist.