Karlsruhe Institut für Technologie(KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. S. Wugalter

WS 2013/14
14.11.2013

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

4. Übungsblatt

Aufgabe 1

Bestimmen Sie alle Häufungswerte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und geben Sie $\liminf\limits_{n\to\infty}(a_n)$ und $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n)$ an.

a) $a_n = \big(1 + (-1)^n\big)^n$

b) $a_n = \begin{cases} 1 + 1/2^n, & n = 3k \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \\ 2, & n = 3k-1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \\ 2 + (n+1)/n, & n = 3k-2 \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \end{cases}$

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen Wert a konvergiert, und geben Sie zu $\varepsilon = 10^{-10}$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ an so, dass für alle $n \geqslant n_0$ stets $|a_n - a| < \varepsilon$ gilt:

a) $a_n = \dfrac{2n}{n+1}$;

b) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{n+1}+1}}$.

Aufgabe 3

Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

a) $a_n = \dfrac{n^2+3n-4}{1+n^2+4n^3}$

b) $a_n = (-1)^n + 1/n$

c) $a_n = \sqrt{9n^2+2n+1} - 3n$

d) $a_n = \dfrac{(1+n)^{42} - n^{42}}{n^{41}}$

e) $a_n = n^4\Big(\sqrt[10]{1+3n^{-4}+n^{-9}} - 1\Big)$

f) $a_n = \sqrt[n]{2^n+3^n}$

Aufgabe 4

a) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge. Zeigen Sie, dass dann jede Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und zwar gegen den selben Grenzwert.

b) Beweisen Sie: Besitzt eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine divergente Teilfolge, so divergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitze die konvergenten Teilfolgen $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. Folgt hieraus die Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Zeigen Sie, dass eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann konvergiert, wenn die drei Teilfolgen $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren.

Aufgabe 5

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_1 := \sqrt{2}, \qquad a_{n+1} := \sqrt{2+a_n} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Konvergiert die Folge? Bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.