Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. S. Wugalter

WS 2013/14

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 4. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Offenbar gilt

$$a_{2n} = \big(1 + (-1)^{2n}\big)^{2n} = (1+1)^{2n} = 2^{2n} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Also ist (a_n) nicht nach oben beschränkt, daher ergibt sich $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n) = \infty$. Weiter gilt

$$a_{2n+1} = \big(1 + (-1)^{2n+1}\big)^{2n+1} = (1-1)^{2n+1} = 0 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Damit ist 0 ein Häufungswert der Folge. Weitere Häufungswerte gibt es nicht, denn zu jedem anderen Punkt kann man eine so kleine Umgebung wählen, dass nur endlich viele Folgenglieder a_n in ihr liegen. Somit ist $\liminf\limits_{n\to\infty}(a_n) = 0$.

b) Wegen $1 + 1/2^n \to 1$ und $2 + (n+1)/n = 2 + 1 + 1/n \to 3$ für $n \to \infty$ ergeben sich hier die drei Häufungswerte 1, 2 und 3. Damit gilt $\liminf\limits_{n\to\infty}(a_n) = 1$ und $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n) = 3$.

Aufgabe 2

a) Wegen $a_n = \frac{2n}{n+1} = \frac{2}{1+\frac{1}{n}}$ konvergiert (a_n) für $n \to \infty$ gegen 2.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$|a_n - 2| = \left|\frac{2n - 2(n+1)}{n+1}\right| = \frac{2}{n+1}.$$

Daher ergibt sich

$$|a_n - 2| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{n+1} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{2}{\varepsilon} - 1.$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{2}{\varepsilon} - 1$. Wie eben gesehen, gilt dann $|a_n - 2| < \varepsilon$ für alle $n \geqslant n_0$. Also konvergiert (a_n) gegen 2.

Ist $\varepsilon = 10^{-10}$, so kann man beispielsweise $n_0 = 2 \cdot 10^{10} > 2 \cdot 10^{10} - 1$ nehmen. Damit gilt $|a_n - 2| < 10^{-10}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2 \cdot 10^{10}$.

b) Die Folge (a_n) ist eine Nullfolge: Es gilt $|a_n| \leqslant 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $\varepsilon \in (0,1)$ ist

$$|a_n| = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{n+1}+1}} < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{\sqrt{n+1}+1} > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \sqrt{n+1} > \frac{1}{\varepsilon^2} - 1 \Leftrightarrow n > \left(\frac{1}{\varepsilon^2} - 1\right)^2 - 1.$$

Hieraus folgt: Wählt man zu einem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > (\frac{1}{\varepsilon^2} - 1)^2 - 1$, dann gilt $|a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon$ für alle $n \geqslant n_0$, d.h. (a_n) konvergiert gegen 0.

Etwa für $n_0 = 10^{40}$ ist $|a_n - 0| < 10^{-10}$ für alle $n \geqslant 10^{40}$ erfüllt.

Aufgabe 3

a) Diese Folge ist konvergent, denn es gilt

$$\frac{n^2+3n-4}{1+n^2+4n^3} = \frac{1/n+3/n^2-4/n^3}{1/n^3+1/n+4} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{0+0-0}{0+0+4} = 0.$$

b) Wegen $a_{2n} = 1+\frac{1}{2n} \to 1$ $(n\to\infty)$ und $a_{2n+1} = -1+\frac{1}{2n+1} \to -1$ $(n\to\infty)$ besitzt die Folge (a_n) die zwei Häufungswerte 1 und -1. Daher ist (a_n) divergent.

c) Wegen $(u-v)(u+v) = u^2-v^2$, also $u-v = (u^2-v^2)/(u+v)$ für $u+v\neq 0$, ergibt sich

$$\begin{aligned} a_n = \sqrt{9n^2+2n+1}-3n &= \frac{9n^2+2n+1-9n^2}{\sqrt{9n^2+2n+1}+3n} = \frac{2n+1}{\sqrt{9n^2+2n+1}+3n} \\ &= \frac{2+1/n}{\sqrt{9+2/n+1/n^2}+3} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

d) Der binomische Satz 4.11 (2) liefert für jedes $n\in\mathbb{N}$

$$(1+n)^{42} = \sum_{k=0}^{42}\binom{42}{k}n^k = \alpha_0+\alpha_1 n+\ldots+\alpha_{42}n^{42}, \quad \text{wobei} \quad \alpha_k := \binom{42}{k}.$$

Wegen $\alpha_{42} = \binom{42}{42} = 1$ ergibt sich $(1+n)^{42}-n^{42} = \alpha_0+\alpha_1 n+\ldots+\alpha_{41}n^{41}$. Folglich ist

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\alpha_0+\alpha_1 n+\ldots+\alpha_{40}n^{40}+\alpha_{41}n^{41}}{n^{41}} \\ &= \frac{\alpha_0}{n^{41}}+\frac{\alpha_1}{n^{40}}+\ldots+\frac{\alpha_{40}}{n}+\alpha_{41} \xrightarrow{n\to\infty} \alpha_{41} = \binom{42}{41} = \binom{42}{1} = 42. \end{aligned}$$

e) Wir verwenden die geometrische Summenformel 4.11 (1)

$$u^m - v^m = (u-v)\sum_{k=0}^{m-1}u^{m-1-k}v^k = (u-v)(u^{m-1}+u^{m-2}v+\ldots+uv^{m-2}+v^{m-1}) \qquad (*)$$

für $m=10$. Setzen wir $b_n := \sqrt[10]{1+3n^{-4}+n^{-9}}$, so gilt für alle $n\in\mathbb{N}$

$$a_n = n^4(b_n-1) \overset{(*)}{=} n^4\cdot\frac{b_n^{10}-1^{10}}{b_n^9+b_n^8+\ldots+b_n+1} = \frac{n^4(3n^{-4}+n^{-9})}{b_n^9+b_n^8+\ldots+b_n+1} = \frac{3+n^{-5}}{b_n^9+b_n^8+\ldots+b_n+1}.$$

Wegen $b_n\to 1$ folgt $a_n\to\frac{3}{10}$ $(n\to\infty)$.

f) Für jedes $n\in\mathbb{N}$ gilt

$$3 = \sqrt[n]{3^n} \leqslant a_n \leqslant \sqrt[n]{3^n+3^n} = \sqrt[n]{2\cdot 3^n} = 3\cdot\sqrt[n]{2}.$$

Wegen $\sqrt[n]{2}\to 1$ $(n\to\infty)$ folgt mit 6.3 (4): $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$.

Aufgabe 4

a) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $\lim_{n\to\infty}a_n =: a$ und $(a_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von (a_n). Wir zeigen, dass $(a_{k(n)})$ konvergiert und $\lim\limits_{n\to\infty}a_{k(n)} = a$ gilt.

Sei $\varepsilon>0$.
Wegen $a_n\to a$ für $n\to\infty$ existiert ein $n_0\in\mathbb{N}$ so, dass für alle $n\geqslant n_0$ gilt: $|a_n-a|<\varepsilon$. Wegen $k(n)<k(n+1)$ für alle $n\in\mathbb{N}$ existiert ein $N\in\mathbb{N}$ mit $k(N)\geqslant n_0$. Für alle $n\in\mathbb{N}$ mit $n\geqslant N$ ist dann $k(n)\geqslant k(N)\geqslant n_0$. Demzufolge gilt $|a_{k(n)}-a|<\varepsilon$ für alle $n\geqslant N$, d.h. $(a_{k(n)})$ konvergiert gegen a.

b) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitze eine divergente Teilfolge $(a_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Zu zeigen ist, dass dann auch (a_n) divergent ist.

Wir führen einen Beweis durch Widerspruch. Annahme: (a_n) konvergiert.
Dann konvergiert laut a) jede Teilfolge von (a_n). Dies ist jedoch nicht möglich, weil vorausgesetzt wurde, dass (a_n) eine divergente Teilfolge besitzt. Also ist die Annahme falsch, d.h. die Folge (a_n) divergiert.

c) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Im allgemeinen folgt aus der Konvergenz von (a_{2n}) und (a_{2n+1}) nicht die Konveregnz von (a_n).

Ist etwa die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $a_n = (-1)^n$. Dann konvergieren die beiden Teilfolgen (a_{2n}) und (a_{2n+1}) für $n \to \infty$. Jedoch ist (a_n) divergent.

d) Sei (a_n) eine Folge. Behauptung:

$$(a_n) \text{ konvergiert} \quad \Longleftrightarrow \quad (a_{2n}),\ (a_{2n+1}) \text{ und } (a_{3n}) \text{ konvergieren.}$$

"$\Rightarrow$": Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere. Gemäß a) konvergiert dann auch jede Teilfolge von (a_n). Insbesondere sind die drei Teilfolgen (a_{2n}), (a_{2n+1}) und (a_{3n}) konvergent.

"$\Leftarrow$": Nun ist die Konvergenz der drei Teilfolgen $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ vorausgesetzt. Zu zeigen: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Wir setzen $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} =: a$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} =: b$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{3n} =: c$ und wollen zuerst $a = b = c$ zeigen.

Da (a_{6n}) Teilfolge von (a_{2n}) ist und (a_{2n}) konvergiert, konvergiert (a_{6n}) gegen $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = a$.
Da (a_{6n}) Teilfolge von (a_{3n}) ist und (a_{3n}) konvergiert, konvergiert (a_{6n}) gegen $\lim\limits_{n\to\infty} a_{3n} = c$.

Hieraus folgt aufgrund der Eindeutigkeit des Grenzwerts $a = c$.

Durch Betrachtung von (a_{6n+3}) ergibt sich analog $b = c$.

Wir wollen nun zeigen, dass (a_n) gegen a konvergiert. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Wegen $a_{2n} \to a$ für $n \to \infty$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_{2n} - a| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geqslant n_0,$$

woraus

$$|a_m - a| < \varepsilon \qquad \text{für alle geraden } m \geqslant 2n_0$$

folgt. Wegen $a_{2n+1} \to b = a$ gibt es ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_{2n+1} - a| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geqslant n_1,$$

woraus

$$|a_m - a| < \varepsilon \qquad \text{für alle ungeraden } m \geqslant 2n_1 + 1$$

folgt. Demnach gilt für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geqslant \max\{2n_0, 2n_1 + 1\}$

$$|a_m - a| < \varepsilon,$$

d.h. (a_n) konvergiert und zwar gegen a.

Aufgabe 5

Die Folge (a_n) sei durch die Rekursionsvorschrift

$$a_1 = \sqrt{2}, \qquad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

gegeben. (Offenbar sind alle $a_n \geqslant 0$; also kann man die Wurzel ziehen.)
1. Beh.: Die Folge (a_n) ist monoton wachsend, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$ gilt $a_n \geqslant a_{n-1}$.
Induktionsanfang: Für $n = 2$ gilt $a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \geqslant \sqrt{2} = a_1$.

Induktionsschluss: Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$. Für dieses n gelte $a_n \geqslant a_{n-1}$ (IV). Dann folgt

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \overset{\text{IV}}{\geqslant} \sqrt{2 + a_{n-1}} = a_n.$$

2. Beh.: Die Folge (a_n) ist nach oben durch 2 beschränkt, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \leqslant 2$.
Induktionsanfang: Es gilt $a_1 = \sqrt{2} \leqslant 2$.
Induktionsschluss: Sei $n \in \mathbb{N}$. Für dieses n gelte $a_n \leqslant 2$ (IV). Dann folgt

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \overset{\text{IV}}{\leqslant} \sqrt{2 + 2} = 2.$$

Da (a_n) monoton wachsend und nach oben beschränkt ist, konvergiert (a_n) gegen einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$. Da die Folge (a_{n+1}) eine Teilfolge von (a_n) ist, gilt nach Teil a): $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a$. Durch den Grenzübergang $n \to \infty$ in der Rekursionsformel ergibt sich für a die Gleichung

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2 + a_n} = \sqrt{2 + \lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt{2 + a}.$$

Quadrieren liefert $a^2 = 2 + a$ bzw. $0 = a^2 - a - 2 = (a - 2)(a + 1)$, also $a = 2$ oder $a = -1$. Wegen $a_n \geqslant 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $a \geqslant 0$ (vgl. 6.3 (3)). Daher ist $a = 2$ der Grenzwert von (a_n).