

**Höhere Mathematik I für die Fachrichtung  
 Elektrotechnik und Informationstechnik  
 Lösungsvorschläge zum 5. Übungsblatt**

**Aufgabe 1**

- a) Für  $n \in \mathbb{N}$  setze  $a_n := \frac{(-2)^{3n-1}}{3^{2n+1}}$ . Wegen

$$a_n = \frac{(-2)^{3n-1}}{3^{2n+1}} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{(-2)^{3n}}{3^{2n}} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{((-2)^3)^n}{(3^2)^n} = -\frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{8}{9}\right)^n$$

gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{8}{9} \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{6}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{8}{9} < 1.$$

Nach dem Wurzelkriterium konvergiert die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Ihr Wert ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\frac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{8}{9}\right)^n = -\frac{1}{6} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{8}{9}\right)^n - 1 \right] \stackrel{\text{geom. Reihe}}{=} -\frac{1}{6} \left[ \frac{1}{1 - (-8/9)} - 1 \right] = \frac{4}{51}.$$

- b) Nach dem binomischen Satz gilt für jedes  $n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+k} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(1 + \frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Wir haben also eine geometrische Reihe vor uns; wegen  $|\frac{3}{4}| < 1$  ist sie konvergent und hat den Wert

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} = 4.$$

**Aufgabe 2**

- a) Die Bernoullische Ungleichung liefert  $2^n = (1+1)^n \geq 1+n \geq n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , d. h. es ist stets  $\sqrt[n]{n} \leq 2$ . Somit ergibt sich für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$\left| \frac{\sqrt[n]{n}}{n!} \right| \leq \frac{2}{n!} =: b_n.$$

Bekanntlich konvergiert  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$  (mit Reihenwert  $e$ ), also ist auch  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  konvergent, und die absolute Konvergenz der Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n!}$  folgt mit dem Majorantenkriterium.

- b) Für  $n \geq 3$  ist der Nenner positiv und es gilt

$$\frac{n+4}{n^2-3n+1} \geq \frac{n+0}{n^2+0} = \frac{1}{n} \geq 0.$$

Aus der Divergenz der harmonischen Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  folgt mit dem Minorantenkriterium die Divergenz von  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^2-3n+1}$ .

- c) Ist  $a_n := \frac{(n!)^2}{(2n)!}$  gesetzt, so gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{((n+1)!)^2 \cdot (2n)!}{(2(n+1))! \cdot (n!)^2} \right| = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{(1+1/n)^2}{(2+2/n)(2+1/n)}.$$

Also ist  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(1+0)^2}{(2+0)(2+0)} = \frac{1}{4} < 1$ . Das Quotientenkriterium liefert, dass  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  absolut konvergiert.

### Aufgabe 3

- a) Offenbar ist  $a_1 = 2 > 0$ . Für  $n > 1$  gilt wegen  $n > \sqrt{n}$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} > \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0.$$

Die Konvergenz von  $(a_n)$  gegen 0 ist klar wegen  $1/\sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  und  $1/n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

- b) Für jedes  $N \in \mathbb{N}$  gilt

$$s_N := \sum_{n=1}^N (-1)^n a_n = \sum_{n=1}^N \left( \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{-1}{n} \right) = \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}.$$

Die erste Summe ist die  $N$ -te Partialsumme der Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ , die nach dem Leibnizkriterium konvergiert; insbesondere ist die Folge ihrer Partialsummen  $(\sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})_{N \in \mathbb{N}}$  nach oben beschränkt, d. h. es gibt eine Konstante  $C$  mit  $\sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \leq C$  für alle  $N \in \mathbb{N}$ . Es folgt

$$s_N \leq C - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \quad \text{für jedes } N \in \mathbb{N}.$$

Aufgrund von  $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \rightarrow \infty$  für  $N \rightarrow \infty$  folgt hieraus  $s_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} -\infty$ , d. h. die gegebene Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  ist tatsächlich divergent.

- c) Das Leibnizkriterium ist nicht anwendbar, weil die Folge  $(a_n)$  nicht monoton ist.  
 d) Zunächst zum Quotientenkriterium: Für ungerades  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(1 + \frac{1}{2})^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{(1 - \frac{1}{2})^n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{(\frac{3}{2})^{n+1}}{(\frac{1}{2})^n} = \frac{1}{(1 + \frac{1}{n})^2} \cdot \frac{3^{n+1}}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

Für gerades  $n \in \mathbb{N}$  dagegen ergibt sich

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(1 - \frac{1}{2})^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{(1 + \frac{1}{2})^n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{(\frac{1}{2})^{n+1}}{(\frac{3}{2})^n} = \frac{1}{(1 + \frac{1}{n})^2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Es gilt also  $\limsup(b_{n+1}/b_n) = \infty > 1$  und  $\liminf(b_{n+1}/b_n) = 0 < 1$ . Das Quotientenkriterium liefert somit keine Entscheidung.

Das Wurzelkriterium kann dennoch eine Entscheidung bringen, und so ist es in diesem Falle tatsächlich. Für gerades  $n \in \mathbb{N}$  gilt nämlich

$$\sqrt[n]{|b_n|} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{\sqrt[n]{n^2}} = \frac{\frac{3}{2}}{(\sqrt[n]{n})^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2},$$

d. h. es gilt  $\limsup \sqrt[n]{|b_n|} \geq \frac{3}{2} > 1$ , und dies impliziert die Divergenz der Reihe.

### Aufgabe 4

- a) Es sei  $p \in \mathbb{N}$  fest sowie  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine konvergente Folge mit Grenzwert  $a$ . Um die Konvergenz von  $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - a_{n+p})$  zu beweisen, betrachten wir die Folge der  $N$ -ten Partialsummen  $(s_N)$  und zeigen, dass diese für  $N \rightarrow \infty$  konvergiert. Für jedes  $N \in \mathbb{N}$  mit  $N \geq p$  gilt

$$\begin{aligned} s_N &= \sum_{n=0}^N (a_n - a_{n+p}) = \sum_{n=0}^N a_n - \sum_{n=0}^N a_{n+p} = \sum_{n=0}^{p-1} a_n + \underbrace{\sum_{n=p}^N a_n}_{= \sum_{k=0}^{N-p} a_{k+p}} - \sum_{n=0}^{N-p} a_{n+p} - \sum_{n=N-p+1}^N a_{n+p} \\ &= \sum_{n=0}^{p-1} a_n - \sum_{n=N-p+1}^N a_{n+p}. \end{aligned}$$

Wegen  $\lim_{N \rightarrow \infty} a_{N+1} = a, \lim_{N \rightarrow \infty} a_{N+2} = a, \dots, \lim_{N \rightarrow \infty} a_{N+p} = a$  folgt

$$\sum_{n=N-p+1}^N a_{n+p} = a_{N+1} + a_{N+2} + \dots + a_{N+p} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \underbrace{a + a + \dots + a}_{p \text{ Summanden}} = p a.$$

Demnach konvergiert  $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - a_{n+p})$  und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - a_{n+p}) = \lim_{N \rightarrow \infty} s_N = \sum_{n=0}^{p-1} a_n - p a.$$

b) i) Sei  $p \in \mathbb{N}$  fest. Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq p+1$  gilt

$$\frac{1}{n^2 - p^2} = \frac{1}{(n-p)(n+p)} = \frac{1}{2p} \left( \frac{1}{n-p} - \frac{1}{n+p} \right).$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - p^2} &= \frac{1}{2p} \sum_{n=p+1}^{\infty} \left( \frac{1}{n-p} - \frac{1}{n+p} \right) \stackrel{k:=n-(p+1)}{=} \frac{1}{2p} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{k+p+1-p} - \frac{1}{k+p+1+p} \right) \\ &= \frac{1}{2p} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2p+1} \right) = \frac{1}{2p} \sum_{k=0}^{\infty} (a_k - a_{k+2p}) \quad \text{mit } a_k := \frac{1}{k+1}. \end{aligned}$$

Da die Folge  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  gegen  $a = 0$  konvergiert, liefert der a)-Teil, dass die Reihe  $\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - p^2}$  konvergiert und

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - p^2} = \frac{1}{2p} \sum_{k=0}^{\infty} (a_k - a_{k+2p}) = \frac{1}{2p} \sum_{k=0}^{2p-1} a_k - 2p \cdot 0 = \frac{1}{2p} \sum_{k=0}^{2p-1} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2p} \sum_{n=1}^{2p} \frac{1}{n}.$$

ii) Sei  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ . Mit Hilfe von  $\frac{y}{1-y^2} = \frac{1}{1-y} - \frac{1}{1+y}$  (für  $y = x^{2^n}$ ) erhalten wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{1-x^{2^n}} - \frac{1}{1-x^{2^{n+1}}} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) \quad \text{mit } a_n := \frac{1}{1-x^{2^n}}.$$

Die Folge  $(a_n)$  ist konvergent mit Grenzwert 1, falls  $|x| < 1$ , und Grenzwert 0, falls  $|x| > 1$ . Gemäß a) konvergiert die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$  und ihr Wert lautet

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = a_0 - 1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} \frac{1}{1-x} - 1 & \text{für } |x| < 1 \\ \frac{1}{1-x} & \text{für } |x| > 1 \end{cases}.$$

## Aufgabe 5

Sei  $q \in (0, 1)$ . Die geometrische Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$  ist absolut konvergent und es gilt nach einem Beispiel in Abschnitt 7.10 der Vorlesung

$$\left( \frac{1}{1-q} \right)^2 = \left( \sum_{n=0}^{\infty} q^n \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n.$$

Diese Reihe ist als Cauchyprodukt absolut konvergenter Reihen ebenfalls absolut konvergent. Indem man das Cauchyprodukt dieser Reihe mit  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$  bildet, ergibt sich

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{1-q} \right)^2 \cdot \frac{1}{1-q} &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} q^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n (k+1)q^k q^{n-k} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( q^n \sum_{k=0}^n (k+1) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} (n+1)(n+2)q^n. \end{aligned}$$

Für die gegebene Reihe erhalten wir daher

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)q^n = 2 \left( \frac{1}{1-q} \right)^2 \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$