Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. S. Wugalter

WS 2013/2014
28.11.2013

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

6. Übungsblatt

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} z^n = \frac{1}{(1-z)^{k+1}}$$

gilt und dass diese Potenzreihe den Konvergenzradius $R = 1$ besitzt. Berechnen Sie nun für $|z| < 1$ die Werte der Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) z^{2n}\,.$$

Hinweis: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $n^2 = (n+2)(n+1) - 3(n+1) + 1$ und $2n+1 = 2(n+1) - 1$.

Aufgabe 2

Welche Funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ werden durch die folgenden Potenzreihen dargestellt?

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{(n+1)!} z^n$ **b)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (z+1)^{2n+2}$

Aufgabe 3

Für welche $x \in \mathbb{R}$ bzw. $z \in \mathbb{C}$ konvergieren die folgenden Potenzreihen?

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2} x^n$ **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} (z-2i)^n$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{n(1+(-1)^n)} x^{2n}$ **d)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) z^n$

e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 2^k z^{k^2}$ **f)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3i)^n}{n^2}$

Aufgabe 4

a) Beweisen Sie den *Cauchyschen Verdichtungssatz:*

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende, reelle Folge mit $a_n \geqslant 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} \text{ konvergiert.}$$

Folgt dies auch, wenn man statt der Monotonie nur $a_n \geqslant 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ voraussetzt?

b) Es sei $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, wobei $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$. Setze für $x \geqslant 0$: $x^\alpha := \sqrt[q]{x^p}$. Zeigen Sie mit Hilfe von Teil a), dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ genau dann konvergiert, wenn $\alpha > 1$ ist.