Karlsruhe Institut für Technologie
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. S. Wugalter

WS 2013/14

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 6. Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$. Wir zeigen mit vollständiger Induktion:

$$\text{Für alle } k \in \mathbb{N}_0 \text{ ist } \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} z^n \text{ absolut konvergent, mit dem Wert } \frac{1}{(1-z)^{k+1}}.$$

Induktionsanfang: Für $k = 0$ haben wir wegen $\binom{n+k}{n} = \binom{n}{n} = 1$ die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ vor uns. Diese ist bekanntlich absolut konvergent und hat den Wert $\frac{1}{1-z}$.
Induktionsschluss: Sei $k \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Für dieses k konvergiere $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} z^n$ absolut, mit dem Wert $\frac{1}{(1-z)^{k+1}}$ (IV). Wir bilden das Cauchyprodukt der zwei Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} z^n = \frac{1}{(1-z)^{k+1}} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} z^n$ absolut konvergent und, da auch die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ absolut konvergiert, ist das Cauchyprodukt der Reihen nach Satz 7.10 absolut konvergent und hat als Wert das Produkt der beiden Reihenwerte:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-z)^{k+2}} &= \frac{1}{(1-z)^{k+1}} \cdot \frac{1}{1-z} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} z^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{n} \binom{m+k}{m} z^m z^{n-m} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{n} \binom{m+k}{m} \right) z^n .\end{aligned}$$

Die Induktionsbehauptung ist also gezeigt, wenn wir noch $\sum_{m=0}^{n} \binom{m+k}{m} = \binom{n+k+1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ beweisen. Dazu verwenden wir vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$:
Induktionsanfang: Für $n = 0$ steht links $\binom{k}{0} = 1$ und rechts $\binom{k+1}{0} = 1$.
Induktionsschluss: Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Für dieses n gelte $\sum_{m=0}^{n} \binom{m+k}{m} = \binom{n+k+1}{n}$ (IV). Dann folgt

$$\sum_{m=0}^{n+1} \binom{m+k}{m} = \sum_{m=0}^{n} \binom{m+k}{m} + \binom{n+1+k}{n+1} \overset{\text{IV}}{=} \binom{n+k+1}{n} + \binom{n+k+1}{n+1} \overset{4.10}{=} \binom{n+k+2}{n+1} = \binom{(n+1)+k+1}{n+1}.$$

Da die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} z^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ absolut konvergent ist, ergibt sich für ihren Konvergenzradius $R \geqslant 1$. Zudem ist $\binom{n+k}{n} \geqslant 1$, also $\limsup_{n\to\infty} \binom{n+k}{n}^{1/n} \geqslant 1$ und damit $R \leqslant 1$. Folglich gilt $R = 1$.
Wegen $\binom{n+1}{n} = n+1$ und $\binom{n+2}{n} = \frac{1}{2}(n+2)(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ wissen wir nun

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n = \frac{1}{(1-z)^2} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) z^n = \frac{2}{(1-z)^3}.$$

Daraus folgt dann wegen $n^2 = (n+2)(n+1) - 3(n+1) + 1$ für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) z^n - 3 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n + \sum_{n=0}^{\infty} z^n \\ &= \frac{2}{(1-z)^3} - \frac{3}{(1-z)^2} + \frac{1}{1-z} = \frac{2 - 3(1-z) + (1-z)^2}{(1-z)^3} = \frac{z^2+z}{(1-z)^3}\end{aligned}$$

und wegen $2n+1 = 2(n+1)-1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)z^{2n} = -z^0 + \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)(z^2)^n = -1 + 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(z^2)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(z^2)^n$$
$$= -1 + \frac{2}{(1-z^2)^2} - \frac{1}{1-z^2} = \frac{-(1-z^2)^2 + 2 - (1-z^2)}{(1-z^2)^2} = \frac{3z^2 - z^4}{(1-z^2)^2}\,.$$

Aufgabe 2

a) Die Reihe lässt sich als Differenz zweier Potenzreihen darstellen:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n-1}{(n+1)!}\,z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1-2}{(n+1)!}\,z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,z^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(n+1)!}\,z^n\,.$$

Die erste Reihe ergibt $E(z)$, die zweite liefert für $z=0$ den Wert 2 und für $z \neq 0$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(n+1)!}\,z^n = \frac{2}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}\,z^{n+1} = \frac{2}{z}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k!} = \frac{2}{z}\big(E(z)-1\big)\,.$$

Insgesamt folgt: Die von $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n-1}{(n+1)!}\,z^n$ dargestellte Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist gegeben durch

$$f(0) = E(0) - 2 = -1\,, \qquad f(z) = E(z) - \frac{2E(z)-2}{z} = \frac{(z-2)E(z)+2}{z} \quad (z \neq 0)\,.$$

b) Hier ergibt sich gemäß der Reihendarstellung der Sinus-Funktion für jedes $z \in \mathbb{C}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z+1)^{2n+2} = (z+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z+1)^{2n+1} = (z+1)\sin(z+1)\,.$$

Aufgabe 3

a) Für $a_n := (2n+1)/(n-1)^2$ gilt

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{2n+1}{(n-1)^2}\cdot\frac{n^2}{2n+3} = \frac{2+1/n}{(1-1/n)^2}\cdot\frac{1}{2+3/n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{2} = 1\,.$$

Die Reihe hat daher den Konvergenzradius 1. Wir müssen nun noch die Ränder des Konvergenzintervalls, also $x=-1$ und $x=1$, untersuchen. Dies liefert die zwei Reihen

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+1}{(n-1)^2}(-1)^n \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+1}{(n-1)^2}\,.$$

Die Konvergenz der ersten Reihe wird durch das Leibnizkriterium garantiert, denn

$$a_n = \frac{2n+1}{(n-1)^2} = \frac{2(n-1)+3}{(n-1)^2} = \frac{2}{n-1} + \frac{3}{(n-1)^2} \geqslant \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} = \frac{2n+3}{n^2} = a_{n+1}\,.$$

Die zweite Reihe hingegen divergiert wegen $a_n \geqslant 2n/n^2 = 2/n$ und des Minorantenkriteriums. Insgesamt: Die Reihe konvergiert nur für $x \in [-1,1)$.

b) Wegen $\sqrt[n]{|1/n^n|} = 1/n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ hat diese Reihe den Konvergenzradius ∞, d. h. sie konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$.

c) Die Reihe hat die Form $\sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k$ mit $a_{2n} = e^{n(1+(-1)^n)}$ und $a_{2n+1} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit ist

$$\sqrt[2n]{|a_{2n}|} = \sqrt[2n]{\left|e^{n(1+(-1)^n)}\right|} = \begin{cases} e^{2n/2n} = e\,, & n \text{ gerade}\,,\\ e^{0/2n} = 1\,, & n \text{ ungerade}\,, \end{cases}$$

und wegen $\sqrt[2n+1]{|a_{2n+1}|} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = e$, d. h. die Potenzreihe hat den Konvergenzradius e^{-1}. Für $x = \pm e^{-1}$ ergibt sich die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{n(1+(-1)^n)} e^{-2n}\,.$$

Diese Reihe ist divergent, da für gerades n gilt: $e^{n(1+(-1)^n)}e^{-2n} = e^{2n}e^{-2n} = 1 \nrightarrow 0$ $(n \to \infty)$. Die Potenzreihe konvergiert daher nur für $x \in (-e^{-1}, e^{-1})$.

Bemerkung: Man kann auch $y := x^2$ setzen und $\sum_{n=1}^{\infty} e^{n(1+(-1)^n)} y^n$ betrachten. Diese Reihe hat Konvergenzradius e^{-2}, d.h. sie ist konvergent für $|y| < e^{-2}$ und divergent für $|y| > e^{-2}$. Hieraus folgt dann Konvergenz für $|x| < e^{-1}$ und Divergenz für $|x| > e^{-1}$.

d) Für $a_n := 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ gilt offenbar $1 \leqslant a_n \leqslant n$. Wegen $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$ folgt hieraus $\sqrt[n]{|a_n|} \xrightarrow{n\to\infty} 1$. Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ hat also den Konvergenzradius $R = 1^{-1} = 1$. Für $|z| = 1$ konvergiert die Reihe nicht, denn dann gilt $|a_n z^n| = a_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, d. h. die Reihenglieder konvergieren nicht gegen 0. Konvergenz der Reihe liegt also nur für $|z| < 1$ vor.

e) Auch diese Potenzreihe hat den Konvergenzradius 1, denn

$$\sqrt[k]{\left|2^k z^{k^2}\right|} = \sqrt[k]{2^k} \cdot \sqrt[k]{|z|^{k^2}} = 2|z|^k \xrightarrow{k\to\infty} \begin{cases} 0, & |z| < 1, \\ \infty, & |z| > 1. \end{cases}$$

Auf dem Rand des Konvergenzkreises liegt keine Konvergenz vor, denn für $|z| = 1$ gilt $|2^k z^{k^2}| = 2^k \nrightarrow 0$ $(k \to \infty)$. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k z^{k^2}$ konvergiert somit nur für $|z| < 1$.

f) Für den Konvergenzradius R von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3i)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z+3i)^n$ mit $a_n := \frac{1}{n^2}$ ergibt sich wegen

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} = 1$$

$R = 1^{-1} = 1$. Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3i)^n}{n^2}$ konvergiert also für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z+3i| < 1$ und divergiert für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z+3i| > 1$. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z+3i| = 1$ gilt

$$\left|\frac{(z+3i)^n}{n^2}\right| = \frac{|z+3i|^n}{n^2} = \frac{1}{n^2} \qquad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}.$$

Wegen der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3i)^n}{n^2}$ für $|z+3i| = 1$ nach dem Majorantenkriterium konvergent. Also konvergiert die Reihe genau für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z+3i| \leqslant 1$.

Aufgabe 4

a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $a_{n+1} \leqslant a_n$ und $a_n \geqslant 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} \text{ konvergiert.}$$

Beweis:

"$\Rightarrow$": Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent. Wir setzen $b := \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Um die Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ zu zeigen, müssen wir begründen, dass die Folge $(s_K)_{K\in\mathbb{N}} := (\sum_{k=0}^{K} 2^k a_{2^k})_{K\in\mathbb{N}}$ für $K \to \infty$ konvergiert. Da (a_n) monoton fallend ist, gilt für jedes $K \in \mathbb{N}$

$$b \geqslant a_1 + a_2 + (a_3+a_4) + (a_5+\ldots+a_8) + \ldots + (a_{2^{K-1}+1}+\ldots+a_{2^K}) \geqslant \frac{1}{2}a_1 + a_2 + 2a_4 + \ldots + 2^{K-1}a_{2^K}.$$

Also ist $s_K = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^K a_{2^K} \leqslant 2b$ für jedes $K \in \mathbb{N}$, d.h. $(s_K)_{K\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt. Wegen $a_n \geqslant 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $(s_K)_{K\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend.

Nach Satz 6.4 ist $(s_K)_{K\in\mathbb{N}}$ konvergent, d.h. $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ konvergiert.

"$\Leftarrow$": Nun konvergiere $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$. Wir schreiben wie zuvor $(s_K)_{K\in\mathbb{N}} := (\sum_{k=0}^{K} 2^k a_{2^k})_{K\in\mathbb{N}}$. Nach Voraussetzung ist (s_K) konvergent, etwa $s_K \to s$ $(K \to \infty)$.

Ist $b_N := \sum_{n=1}^{N} a_n$ für $N \in \mathbb{N}$ gesetzt, so gilt für jedes K mit $2^K \geqslant N$

$$\begin{aligned} b_N &= a_1 + a_2 + \ldots + a_N \leqslant a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + \ldots + a_7) + \ldots + (a_{2^K} + \ldots + a_{2^{K+1}-1}) \\ &\leqslant a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^K a_{2^K} = s_K \leqslant s. \end{aligned}$$

Also ist (b_N) beschränkt. Da (b_N) überdies monoton wachsend ist, liefert Satz 6.4 die Konvergenz von (b_N), d.h. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

Setzt man statt der Monotonie nur $a_n \geqslant 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ voraus, so ist die Aussage i.a. falsch. Ist beispielsweise die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch

$$a_n = \begin{cases} 1/n & \text{falls } n = 2^k \text{ für ein } k \in \mathbb{N}_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

also $(a_n) = (1, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, 0, 0, \frac{1}{8}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{16}, \ldots)$, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}$, jedoch ist $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 1$ divergent.

b) Für $\alpha \in \mathbb{Q}$ setze $a_n := \frac{1}{n^\alpha}$. Dann genügt (a_n) den Voraussetzungen von Teil a). Dieser liefert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \text{ konvergent} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{(2^k)^\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\Big)^k \ \text{ konvergent}$$

$$\overset{\text{geom. Reihe}}{\Leftrightarrow} \quad \left|\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1.$$