Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. S. Wugalte

WS 2013/14
12.12.2013

**Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik**

**8. Übungsblatt**

## Aufgabe 1

Die Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} & \text{für } 0 < |x| \leqslant 1 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} .$$

**a)** Zeigen Sie, dass $f$ stetig ist.

**b)** Bestimmen Sie den Wertebereich $f([-1,1])$ von $f$.
*Hinweis:* Zeigen Sie zunächst, dass $|f(x)| \leqslant 1$ für alle $x \in [-1,1]$ gilt.

**c)** Zeigen Sie, dass $f$ eine Umkehrfunktion besitzt. Berechnen Sie $f^{-1}$.

**d)** Beweisen Sie, dass $f^{-1}$ streng monoton wachsend ist.

**e)** Ist $f$ streng monoton wachsend? Begründen Sie Ihre Antwort.

## Aufgabe 2

**a)** Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil, Betrag und Argument von

$$z_1 = \left(1 - i\sqrt{3}\right)^{42}, \qquad z_2 = \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{201} .$$

**b)** Es sei $t \in (0, 2\pi)$. Ermitteln Sie die Polarkoordinaten von $z(t) := 1 - e^{it}$.

**c)** Gegeben sei die komplexe Zahl $z = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ . Berechnen Sie $z^3$ und $z^{150}$.

## Aufgabe 3

Zeigen Sie die Identitäten

**a)** $\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \, \tan y}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x, y, x+y \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ ;

**b)** $\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|\arctan x + \arctan y| < \frac{\pi}{2}$ ;

**c)** $\left(\cosh x + \sinh x\right)^n = \cosh(nx) + \sinh(nx)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ ;

**d)** $\operatorname{Arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ;

**e)** $\operatorname{Artanh} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ für alle $x \in (-1,1)$ .

— bitte wenden —

## Aufgabe 4

**a)** Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die gilt

**i)** $2^{x-1} + 3^{x+1} = 2^{x+4} + 3^{x-1}\,;$ **ii)** $x^{\log_{10} x} = 100\,x\,.$

**b)** Beweisen Sie

$$\log_2\bigl(\sqrt{7} - \sqrt{3}\bigr) = 2 - \log_2\bigl(\sqrt{7} + \sqrt{3}\bigr)\,.$$