Karlsruhe Institut für Technologie (KIT) WS 2013/14
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. S. Wugalter

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 9. Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei $k \in \mathbb{Z}$. Um zu beweisen, dass die Funktion $\arcsin_k : [-1,1] \to [\frac{2k-1}{2}\pi, \frac{2k+1}{2}\pi]$ die Umkehrfunktion der bijektiven Funktion $\sin_k : [\frac{2k-1}{2}\pi, \frac{2k+1}{2}\pi] \to [-1,1]$ ist, zeigen wir

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & \arcsin_k(\sin_k(x)) = x & \text{für alle } x \in \left[\frac{2k-1}{2}\pi, \frac{2k+1}{2}\pi\right] \text{ und} \\ \text{(b)} & \sin_k(\arcsin_k(y)) = y & \text{für alle } y \in [-1,1]. \end{array}$$

Vorbemerkung: Für alle $u \in \mathbb{R}$ gilt nach dem Additionstheorem für Sinus

$$\sin(k\pi + u) = \sin(k\pi)\cos(u) + \cos(k\pi)\sin(u) = (-1)^k \sin(u)\,. \tag{1}$$

Zu (a): Sei $x \in [\frac{2k-1}{2}\pi, \frac{2k+1}{2}\pi]$ beliebig. Schreibt man $x = k\pi + u$ mit $u \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \arcsin_k(\sin_k(x)) &= \arcsin_k(\sin(x)) = k\pi + (-1)^k \arcsin(\sin(x)) = k\pi + (-1)^k \arcsin(\sin(k\pi + u)) \\ &\overset{(1)}{=} k\pi + (-1)^k \arcsin((-1)^k \sin(u)) = k\pi + (-1)^k(-1)^k \arcsin(\sin(u)) \\ &= k\pi + u = x \qquad (\text{da } u \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]). \end{aligned}$$

Zu (b): Für jedes $y \in [-1,1]$ gilt

$$\begin{aligned} \sin_k(\arcsin_k(y)) &= \sin(\arcsin_k(y)) = \sin(k\pi + (-1)^k \arcsin(y)) \\ &\overset{(1)}{=} (-1)^k \sin((-1)^k \arcsin(y)) = (-1)^{2k} \sin(\arcsin(y)) = y. \end{aligned}$$

Um zu beweisen, dass die Funktion $\arccos_k : [-1,1] \to [k\pi, (k+1)\pi]$ die Umkehrfunktion der bijektiven Funktion $\cos_k : [k\pi, (k+1)\pi] \to [-1,1]$ ist, zeigen wir

$$\begin{array}{lll} \text{(c)} & \arccos_k(\cos_k(x)) = x & \text{für alle } x \in [k\pi, (k+1)\pi] \text{ und} \\ \text{(d)} & \cos_k(\arccos_k(y)) = y & \text{für alle } y \in [-1,1]. \end{array}$$

Wir verwenden (vgl. 9.2 (7))

$$\sin(x + \tfrac{\pi}{2}) = \cos(x) \qquad \text{bzw.} \qquad \sin(y) = \cos(y - \tfrac{\pi}{2}) \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Zu (c): Sei $x \in [k\pi, (k+1)\pi]$ beliebig. Dann ist $x + \frac{\pi}{2} \in [k\pi + \frac{\pi}{2}, (k+1)\pi + \frac{\pi}{2}]$, und es gilt

$$\begin{aligned} \arccos_k(\cos_k(x)) &= \arccos_k(\cos(x)) = \arcsin_{k+1}(\cos(x)) - \tfrac{\pi}{2} \overset{(2)}{=} \arcsin_{k+1}(\sin(x + \tfrac{\pi}{2})) - \tfrac{\pi}{2} \\ &= x + \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\pi}{2} = x \qquad (\text{nach (a), da } x + \tfrac{\pi}{2} \in [\tfrac{2(k+1)-1}{2}\pi, \tfrac{2(k+1)+1}{2}\pi]). \end{aligned}$$

Zu (d): Für jedes $y \in [-1,1]$ gilt

$$\cos_k(\arccos_k(y)) = \cos(\arcsin_{k+1}(y) - \tfrac{\pi}{2}) \overset{(2)}{=} \sin(\arcsin_{k+1}(y)) \overset{\text{(b)}}{=} y.$$

Aufgabe 2

a) Sei $y > 0$. Für jedes $x \in [0, y]$ gilt

$$x\,e^x = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}\,.$$

Da diese Potenzreihe um die Entwicklungsstelle 0 den Konvergenzradius ∞ besitzt, folgt nach Abschnitt 10.11 der Vorlesung

$$\int_0^y x\,e^x\,dx = \int_0^y \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{n+2}}{(n+2)\,n!}\,.$$

Wegen

$$\frac{y^{n+2}}{(n+2)\,n!} = \frac{n+1}{n+2}\,\frac{y^{n+2}}{(n+1)!} = \Big(1 - \frac{1}{n+2}\Big)\frac{y^{n+2}}{(n+1)!} = \frac{y^{n+2}}{(n+1)!} - \frac{y^{n+2}}{(n+2)!}$$

ist

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{n+2}}{(n+2)\,n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{n+2}}{(n+1)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{n+2}}{(n+2)!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^{k+1}}{k!} - \sum_{l=2}^{\infty} \frac{y^l}{l!}\\ &= y(e^y - 1) - (e^y - 1 - y) = (y-1)e^y + 1\,.\end{aligned}$$

b) Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos(2x))\,.$$

Deshalb erhält man mit Beispiel 10.11 (2)

$$\int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \int_0^\pi \tfrac{1}{2}(1 - \cos(2x))\,dx = \tfrac{1}{2}\int_0^\pi 1\,dx - \tfrac{1}{2}\int_0^\pi \cos(2x)\,dx = \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{1}{2}\tfrac{\sin(2\pi)}{2} = \tfrac{\pi}{2}\,.$$

Wegen $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt hiermit

$$\int_0^\pi \cos^2 x\,dx = \int_0^\pi 1 - \sin^2 x\,dx = \int_0^\pi 1\,dx - \int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \pi - \tfrac{\pi}{2} = \tfrac{\pi}{2}\,.$$

Aufgabe 3

1. Schritt: $f, g \in R[a,b] \;\Rightarrow\; f + g \in R[a,b]$ und $\int_a^b (f+g)\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_a^b g\,dx$.

Seien Z_1, Z_2 beliebige Zerlegungen von $[a,b]$ und $Z := Z_1 \cup Z_2 = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ mit $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Wegen

$$\begin{aligned}\inf(f+g)([x_{j-1}, x_j]) &= \inf\{f(x) + g(x) :\; x \in [x_{j-1}, x_j]\}\\ &\overset{\text{Satz 4.6 (2)}}{\geqslant} \inf\{f(x) + g(\tilde{x}) :\; x, \tilde{x} \in [x_{j-1}, x_j]\}\\ &\overset{\text{A5, 2. Üblatt}}{=} \inf\{f(x) :\; x \in [x_{j-1}, x_j]\} + \inf\{g(\tilde{x}) :\; \tilde{x} \in [x_{j-1}, x_j]\}\\ &= \inf f([x_{j-1}, x_j]) + \inf g([x_{j-1}, x_j])\end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned}s_{f+g}(Z) &= \sum_{j=1}^{n} \inf(f+g)([x_{j-1}, x_j]) \cdot (x_j - x_{j-1})\\ &\geqslant \sum_{j=1}^{n} \inf f([x_{j-1}, x_j]) \cdot (x_j - x_{j-1}) + \sum_{j=1}^{n} \inf g([x_{j-1}, x_j]) \cdot (x_j - x_{j-1})\\ &= s_f(Z) + s_g(Z) \overset{\text{Satz in 10.1}}{\geqslant} s_f(Z_1) + s_g(Z_2)\,.\end{aligned}$$

Aufgrund von $s_{f+g}(Z) \leqslant \sup\{\, s_{f+g}(Z') : Z' \text{ ist Zerlegung von } [a,b]\,\} = s_{f+g}$ folgt

$$s_{f+g} \geqslant s_f(Z_1) + s_g(Z_2)\,.$$

Da Z_1 eine beliebige Zerlegung von $[a,b]$ war, ergibt sich

$$s_{f+g} \geqslant s_f + s_g(Z_2)\,.$$

Da Z_2 eine beliebige Zerlegung von $[a,b]$ war, ergibt sich

$$s_{f+g} \geqslant s_f + s_g\,. \tag{3}$$

Für das obere Integral wollen wir durch eine ähnliche Rechnung die Abschätzung $S_{f+g} \leqslant S_f + S_g$ einsehen. Wegen

$$\begin{aligned}
\sup(f+g)([x_{j-1},x_j]) &= \sup\{f(x)+g(x) :\ x \in [x_{j-1},x_j]\} \\
&\overset{\text{Satz 4.6 (2)}}{\leqslant} \sup\{f(x)+g(\tilde{x}) :\ x,\tilde{x} \in [x_{j-1},x_j]\} \\
&\overset{\text{A5, 2. Üblatt}}{=} \sup\{f(x) :\ x \in [x_{j-1},x_j]\} + \sup\{g(\tilde{x}) :\ \tilde{x} \in [x_{j-1},x_j]\} \\
&= \sup f([x_{j-1},x_j]) + \sup g([x_{j-1},x_j])
\end{aligned}$$

gilt

$$S_{f+g}(Z) = \sum_{j=1}^{n} \sup(f+g)([x_{j-1},x_j]) \cdot (x_j - x_{j-1}) \leqslant S_f(Z) + S_g(Z) \leqslant S_f(Z_1) + S_g(Z_2)\,,$$

woraus wegen $S_{f+g}(Z) \geqslant \inf\{\, S_{f+g}(Z') : Z' \text{ ist Zerlegung von } [a,b]\,\} = S_{f+g}$

$$S_{f+g} \leqslant S_f(Z_1) + S_g(Z_2)$$

folgt. Analog wie zuvor schließen wir hieraus

$$S_{f+g} \leqslant S_f + S_g\,. \tag{4}$$

Da stets $s_{f+g} \leqslant S_{f+g}$ gilt, erhalten wir

$$S_{f+g} \overset{(4)}{\leqslant} S_f + S_g \overset{f,g\in R[a,b]}{=} s_f + s_g \overset{(3)}{\leqslant} s_{f+g} \leqslant S_{f+g}\,,$$

also überall "=". Somit ist $f+g \in R[a,b]$, und es gilt

$$\int_a^b (f+g)\,dx = s_{f+g} = s_f + s_g = \int_a^b f\,dx + \int_a^b g\,dx\,.$$

2. Schritt: $\alpha \geqslant 0, f \in R[a,b] \ \Rightarrow\ \alpha f \in R[a,b]$ und $\int_a^b (\alpha f)\,dx = \alpha \int_a^b f\,dx$.

Sei $\alpha \geqslant 0$ und $f \in R[a,b]$. Für jedes Teilintervall $[y,z]$ von $[a,b]$ gilt

$$\sup(\alpha f)([y,z]) = \sup\{\alpha f(x) : x \in [y,z]\} = \alpha\, \sup\{f(x) : x \in [y,z]\} = \alpha\, \sup f([y,z])$$

und

$$\inf(\alpha f)([y,z]) = \inf\{\alpha f(x) : x \in [y,z]\} = \alpha\, \inf\{f(x) : x \in [y,z]\} = \alpha\, \inf f([y,z])\,.$$

Damit folgt sofort aus der Definition der Ober- und Untersumme für jede Zerlegung Z von $[a,b]$

$$S_{\alpha f}(Z) = \alpha S_f(Z) \qquad \text{und} \qquad s_{\alpha f}(Z) = \alpha s_f(Z)\,.$$

Hiermit ergibt sich

$$\begin{aligned}
s_{\alpha f} &= \sup\{\alpha s_f(Z) :\ Z \text{ ist Zerlegung von } [a,b]\} = \alpha s_f \\
&\overset{f\in R[a,b]}{=} \alpha S_f = \inf\{\alpha S_f(Z) :\ Z \text{ ist Zerlegung von } [a,b]\} = S_{\alpha f}\,.
\end{aligned}$$

Also ist $\alpha f \in R[a,b]$, und es gilt

$$\int_a^b (\alpha f)\,dx = \alpha \int_a^b f\,dx\,.$$

3. Schritt: $f \in R[a,b] \;\Rightarrow\; -f \in R[a,b]$ und $\int_a^b (-f)\,dx = -\int_a^b f\,dx$.

Sei $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ mit $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ eine beliebige Zerlegungen von $[a,b]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} s_{-f}(Z) &= \sum_{j=1}^n \inf(-f)([x_{j-1},x_j]) \cdot (x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^n \inf\{-f(x):\ x \in [x_{j-1},x_j]\} \cdot (x_j - x_{j-1}) \\ &= \sum_{j=1}^n -\sup\{f(x):\ x \in [x_{j-1},x_j]\} \cdot (x_j - x_{j-1}) = -\sum_{j=1}^n \sup f([x_{j-1},x_j]) \cdot (x_j - x_{j-1}) = -S_f(Z) \end{aligned}$$

und

$$S_{-f}(Z) = \sum_{j=1}^n \sup(-f)([x_{j-1},x_j]) \cdot (x_j - x_{j-1}) = -\sum_{j=1}^n \inf f([x_{j-1},x_j]) \cdot (x_j - x_{j-1}) = -s_f(Z)\,.$$

Hiermit ergibt sich

$$\begin{aligned} s_{-f} &= \sup\{-S_f(Z):\ Z \text{ ist Zerlegung von } [a,b]\,\} = -S_f \\ &\overset{f\in R[a,b]}{=} -s_f = \inf\{-s_f(Z):\ Z \text{ ist Zerlegung von } [a,b]\,\} = S_{-f}\,. \end{aligned}$$

Also ist $-f \in R[a,b]$, und es gilt

$$\int_a^b (-f)\,dx = -\int_a^b f\,dx\,.$$

4. Schritt: $\alpha < 0, f \in R[a,b] \;\Rightarrow\; \alpha f \in R[a,b]$ und $\int_a^b (\alpha f)\,dx = \alpha \int_a^b f\,dx$.

Seien $\alpha < 0$ und $f \in R[a,b]$. Wir benutzen die Darstellung $\alpha = (-1)\cdot|\alpha|$. Aus dem 2. Schritt folgt $|\alpha| f \in R[a,b]$ und $\int_a^b (|\alpha| f)\,dx = |\alpha| \int_a^b f\,dx$. Hieraus ergibt sich mit dem 3. Schritt: $-|\alpha| f \in R[a,b]$ und $\int_a^b (-|\alpha| f)\,dx = -|\alpha| \int_a^b f\,dx$ bzw. $\alpha f \in R[a,b]$ und $\int_a^b (\alpha f)\,dx = \alpha \int_a^b f\,dx$.

5. Schritt: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, f, g \in R[a,b] \;\Rightarrow\; \alpha f + \beta g \in R[a,b]$ und $\int_a^b (\alpha f + \beta g)\,dx = \alpha \int_a^b f\,dx + \beta \int_a^b g\,dx$.

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $f, g \in R[a,b]$. Nach Schritt 2 oder 4 gilt $\alpha f \in R[a,b]$ mit $\int_a^b (\alpha f)\,dx = \alpha \int_a^b f\,dx$ sowie $\beta g \in R[a,b]$ mit $\int_a^b (\beta g)\,dx = \beta \int_a^b g\,dx$. Schritt 1 liefert daher $\alpha f + \beta g \in R[a,b]$ mit

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)\,dx = \int_a^b (\alpha f)\,dx + \int_a^b (\beta g)\,dx = \alpha \int_a^b f\,dx + \beta \int_a^b g\,dx\,.$$

Aufgabe 4

a) Siehe Satz E9.1 aus den Ergänzungen zur HM 1.

b) Seien $f \in R[a,b]$ und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Es gelte $f(x) \neq g(x)$ für höchstens endlich viele $x \in [a,b]$.

Setze $h := f - g$ sowie $M := \{x \in [a,b]:\ f(x) \neq g(x)\}$. Wegen $h(x) = 0$ für alle $x \in [a,b] \setminus M$ ist h auf $[a,b] \setminus M$ stetig. Da M (nach Voraussetzung) endlich viele Elemente enthält, ist f in höchstens endlich vielen Stellen in $[a,b]$ unstetig und damit gemäß a) über $[a,b]$ integrierbar. Wie in Aufgabe 4 gesehen, gilt mit $h, f \in R[a,b]$ auch $g = f - h \in R[a,b]$.

Es verbleibt $\int_a^b h\,dx = 0$ zu beweisen, denn dann liefert Aufgabe 4: $\int_a^b g\,dx = \int_a^b f\,dx$. Wegen $|\int_a^b h\,dx| \leqslant \int_a^b |h|\,dx$ genügt es zu zeigen:

$$\int_a^b |h|\,dx = 0\,.$$

Es gilt $|h(x)| > 0$ für alle $x \in M$ und $h(x) = 0$ für alle $x \in [a, b] \setminus M$. Da M endlich ist, folgt $s_{|h|}(Z) = 0$ für jede Zerlegung Z von $[a, b]$. Demnach ist das untere Integral $s_{|h|} = 0$ und wegen $h \in R[a, b]$ ist $\int_a^b |h| \, dx = s_{|h|} = 0$.

Aufgabe 5

a) Sei $f \colon [a, b] \to [0, \infty)$ stetig und es existiere ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) > 0$.

Sei $\varepsilon := \frac{1}{2} f(x_0)$. Nach Voraussetzung ist $\varepsilon > 0$ und aufgrund der Stetigkeit von f in x_0 existiert ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in [a, b]$ mit $|x - x_0| < \delta$. Für solche x gilt

$$f(x) = f(x_0) - (-f(x) + f(x_0)) \geqslant f(x_0) - |f(x) - f(x_0)| \geqslant 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon \,.$$

Setzt man $\alpha := \max\{a, x_0 - \delta\}$ und $\beta := \min\{b, x_0 + \delta\}$, so gilt $a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b$ und $f(x) \geqslant \varepsilon$ für alle $x \in [\alpha, \beta]$. Zusammen mit der Abschätzung $f(x) \geqslant 0$ für alle $x \in [a, b]$ folgt

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \, dx &= \int_a^\alpha f(x) \, dx + \int_\alpha^\beta f(x) \, dx + \int_\beta^b f(x) \, dx \\ &\geqslant \int_a^\alpha 0 \, dx + \int_\alpha^\beta \varepsilon \, dx + \int_\beta^b 0 \, dx = (\beta - \alpha)\varepsilon > 0 \,. \end{aligned}$$

b) Seien $f, g \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(x) \geqslant g(x)$ für alle $x \in [a, b]$ und $f(x_0) > g(x_0)$ für ein $x_0 \in [a, b]$.

Betrachte die Funktion $h : [a, b] \to \mathbb{R}, \ x \mapsto h(x) := f(x) - g(x)$. Dann ist h als Komposition stetiger Funktionen stetig, und es gilt $h(x) \geqslant 0$ für alle $x \in [a, b]$. Außerdem ist $h(x_0) = f(x_0) - g(x_0) > 0$. Somit sind die Voraussetzungen des a)-Teils für die Funktion h erfüllt. Dieser liefert

$$\int_a^b h(x) \, dx > 0 \,,$$

woraus mit Aufgabe 3

$$\int_a^b f(x) \, dx > \int_a^b g(x) \, dx$$

folgt.