

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung  
Elektrotechnik und Informationstechnik  
10. Übungsblatt

**Aufgabe 1**

a) Berechnen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes die folgenden Grenzwerte.

i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$       ii)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \sqrt{x+1} - \cos \sqrt{x-1}\right)$

b) Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes die folgende Abschätzung

$$x \ln x - y \ln y \leq (x - y)(1 + \ln x) \quad \text{für } x > y > 0.$$

**Aufgabe 2**

Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist gegeben durch  $f(x) := 1 - 8(e^{2x} + 4)^{-1}$ .

a) Beweisen Sie, dass  $f$  injektiv ist, und zeigen Sie  $f'(x) = 1 - (f(x))^2$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

b) Berechnen Sie damit die Ableitung der Umkehrfunktion von  $f$ .

c) Bestimmen Sie eine explizite Darstellung von  $f^{-1}$  und berechnen Sie damit erneut die Ableitung von  $f^{-1}$ .

d) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an das Schaubild von  $f$  in  $x_0 = 0$  sowie die Gleichung der Tangente an das Schaubild von  $f^{-1}$  in  $y_0 = -\frac{3}{5}$ .

**Aufgabe 3**

a) Berechnen Sie das Taylorpolynom  $T_4(f; 0)$  von  $f : x \mapsto \ln(1+x)$  und zeigen Sie

$$0 \leq \ln(1+x) - T_4(f; 0)(x) \leq \frac{1}{5} x^5 \quad \text{für alle } x \geq 0.$$

b) Bestimmen Sie Zahlen  $a$ ,  $b$  und  $c$ , für die gilt:

$$|\ln(2+x) - a - bx| \leq cx^2 \quad \text{für alle } x \in [-1, 1].$$

c) Approximieren Sie die Funktion  $f(x) := e^{-x} + \frac{1}{1+x}$  durch das Taylorpolynom  $T_2(f; \frac{1}{2})$  und geben Sie eine Konstante  $C > 0$  an so, dass für alle  $x \in [0, 1]$  gilt:

$$|f(x) - T_2(f; \frac{1}{2})(x)| \leq C |x - \frac{1}{2}|^3.$$

#### Aufgabe 4

a) Zeigen Sie, dass für alle  $|x| < 1$  gilt

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

b) Bestimmen Sie durch gliedweises Differenzieren den Wert der Potenzreihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n^2 - n} \quad \text{für } |x| < 1.$$

c) Die Funktion  $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  ist definiert durch  $f(x) := \ln(1 - x^2)$ . Berechnen Sie  $f^{(20)}(0)$  sowie  $f^{(31)}(0)$ .

#### Aufgabe 5

Die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist gegeben durch  $f(x) := x^2 + 2x - 3$ . Berechnen Sie eine Potenzreihe, die in einer Umgebung von  $x_0 = -1$  die Funktion  $1/f$  darstellt. Bestimmen Sie den Konvergenzradius.