Karlsruhe Institut für Technologie
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. S. Wugalter

WS 2013/14

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 10. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) **i)** Wir betrachten die differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) := \cos x$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es zu jedem $x > 0$ ein $\xi \in (0, x)$ mit

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi)\,, \qquad \text{d.h.} \qquad \frac{\cos x - 1}{x} = -\sin \xi\,.$$

Speziell zu $x_n := \frac{1}{n}$ existiert ein solches $\xi_n \in (0, \frac{1}{n})$. Dann gilt $\xi_n \to 0$ für $n \to \infty$ und

$$n\big(1 - \cos \tfrac{1}{n}\big) = \frac{1 - \cos x_n}{x_n} = \sin \xi_n \xrightarrow{n\to\infty} \sin 0 = 0\,, \qquad \text{da sin in 0 stetig ist.}$$

ii) Hier betrachten wir die Funktion $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \cos \sqrt{y}$. Die Kettenregel liefert, dass f auf $(0, \infty)$ differenzierbar ist mit $f'(y) = \frac{-\sin\sqrt{y}}{2\sqrt{y}}$ für alle $y > 0$. Nach dem Mittelwertsatz existiert zu jedem $x > 1$ ein $\xi_x \in (x - 1, x + 1)$ mit

$$\frac{f(x+1) - f(x-1)}{(x+1) - (x-1)} = f'(\xi_x)\,, \qquad \text{d.h.} \qquad \frac{\cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x-1}}{2} = \frac{-\sin\sqrt{\xi_x}}{2\sqrt{\xi_x}}\,.$$

Hieraus ergibt sich die Abschätzung

$$\big|\cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x-1}\big| = \left|\frac{\sin\sqrt{\xi_x}}{\sqrt{\xi_x}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\xi_x}} \overset{\xi_x\in(x-1,x+1)}{\leqslant} \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,.$$

Wegen $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = 0$ ist der zu bestimmende Grenzwert 0.

b) Für $t > 0$ setzen wir $f(t) := t \ln t$. Dann ist f differenzierbar mit $f'(t) = 1 \cdot \ln t + t \cdot \frac{1}{t} = 1 + \ln t$. Zu $x > y > 0$ existiert gemäß Mittelwertsatz ein $\xi \in (y, x)$ mit

$$x \ln x - y \ln y = (x - y) f'(\xi) = (x - y)(1 + \ln \xi) \leqslant (x - y)(1 + \ln x)\,.$$

Aufgabe 2

a) Es gilt $f'(x) = 8(e^{2x} + 4)^{-2} \cdot 2e^{2x} = 16e^{2x}(e^{2x} + 4)^{-2} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$; also ist f streng monoton wachsend und damit injektiv. Wegen

$$\begin{aligned}1-(f(x))^2 &= 1 - \big(1 - 8(e^{2x} + 4)^{-1}\big)^2 = 1 - \big(1 - 16(e^{2x} + 4)^{-1} + 64(e^{2x} + 4)^{-2}\big)\\ &= 16(e^{2x} + 4)^{-1} - 64(e^{2x} + 4)^{-2} = 16(e^{2x} + 4)^{-2}\big((e^{2x} + 4) - 4\big) = 16e^{2x}(e^{2x} + 4)^{-2}\end{aligned}$$

gilt auch die behauptete Gleichung.

b) f hat als Bildbereich $(-1, 1)$, denn $x \mapsto (e^{2x} + 4)^{-1}$ hat als Bildbereich $(0, \frac{1}{4})$. Da stets $f'(x) \neq 0$ gilt, liefert der Satz über die Umkehrfunktion, dass $f^{-1}\colon (-1, 1) \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist mit

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \overset{\text{a)}}{=} \frac{1}{1 - (f(f^{-1}(y)))^2} = \frac{1}{1 - y^2} \qquad \text{für alle } y \in (-1, 1)\,.$$

c) Wir lösen $f(x) = y$ nach x auf:

$$1 - 8(e^{2x} + 4)^{-1} = y \iff (1 - y)^{-1} = \tfrac{1}{8}(e^{2x} + 4) \iff 8(1 - y)^{-1} - 4 = e^{2x}$$
$$\iff x = \tfrac{1}{2} \ln\big(8(1 - y)^{-1} - 4\big).$$

Damit ergibt sich für jedes $y \in (-1, 1)$

$$(f^{-1})'(y) = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{8(1 - y)^{-1} - 4} \cdot \frac{8}{(1 - y)^2} = \frac{4}{8(1 - y) - 4(1 - y)^2} = \frac{4}{4 - 4y^2} = \frac{1}{1 - y^2}.$$

d) Es gilt $f(0) = 1 - \frac{8}{5} = -\frac{3}{5}$, $f'(0) = 1 - (-\frac{3}{5})^2 = \frac{16}{25}$, $f^{-1}(-\frac{3}{5}) = 0$ und $(f^{-1})'(-\frac{3}{5}) = \frac{25}{16}$.

$$T(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0), \qquad \text{also} \qquad T(x) = \tfrac{16}{25}x - \tfrac{3}{5}$$

ist die Gleichung der Tangente an das Schaubild von f in $x_0 = 0$. Die Tangente an das Schaubild von f^{-1} in $y_0 = -\frac{3}{5}$ hat die Gleichung

$$T(y) = (f^{-1})'(y_0)(y - y_0) + f^{-1}(y_0), \qquad \text{also} \qquad T(y) = \tfrac{25}{16}y + \tfrac{15}{16}.$$

Aufgabe 3

a) Die durch $f(x) := \ln(1+x)$ definierte Funktion $f\colon (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ ist beliebig oft differenzierbar. Wegen

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x}, \qquad f''(x) = \frac{-1}{(1 + x)^2}, \qquad f'''(x) = \frac{2}{(1 + x)^3}, \qquad f''''(x) = \frac{-6}{(1 + x)^4},$$
$$f^{(5)}(x) = \frac{24}{(1 + x)^5}$$

sind

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 1, \qquad f''(0) = -1, \qquad f'''(0) = 2, \qquad f''''(0) = -6$$

und für das Taylorpolynom $T_4(f; 0)$ ergibt sich

$$T_4(f; 0)(x) = \sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x - 0)^k = 0 + x + \tfrac{1}{2!}(-1)x^2 + \tfrac{1}{3!}\,2x^3 + \tfrac{1}{4!}(-6)x^4$$
$$= x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4.$$

Sei $x \geqslant 0$. Um die Abschätzung $0 \leqslant \ln(1 + x) - T_4(f; 0)(x) \leqslant \frac{1}{5}x^5$ zu zeigen, verwenden wir den Satz von Taylor. Dieser besagt, dass es ein ξ zwischen 0 und x gibt mit

$$f(x) = T_4(f; 0)(x) + \frac{f^{(4+1)}(\xi)}{(4 + 1)!}(x - 0)^{4+1},$$

also mit

$$f(x) - T_4(f; 0)(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}x^5.$$

Somit reicht es, die Abschätzung $0 \leqslant \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}x^5 \leqslant \frac{1}{5}x^5$ einzusehen. Diese ist erfüllt, denn:

$$\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}x^5 = \frac{1}{5!} \cdot \frac{24}{(1 + \xi)^5}x^5 \geqslant 0,$$
$$\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}x^5 = \frac{1}{5!} \cdot \frac{24}{(1 + \xi)^5}x^5 \leqslant \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(1 + 0)^5}x^5 = \frac{1}{5}x^5.$$

b) Für die durch $f(x) := \ln(2+x)$ gegebene Funktion $f\colon (-2,\infty) \to \mathbb{R}$, die beliebig oft differenzierbar ist, gilt

$$f'(x) = \frac{1}{2+x}\,, \qquad f''(x) = -\frac{1}{(2+x)^2}\,.$$

Also haben wir $f(0) = \ln 2$ und $f'(0) = \frac{1}{2}$. Nach dem Satz von Taylor gibt es zu jedem $x \in [-1,1]$ ein ξ zwischen 0 und x mit

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2!}\,x^2 = \ln 2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2(2+\xi)^2}\,.$$

Daher gilt wegen $\xi \in [-1,1]$

$$\left|f(x) - \ln 2 - \frac{x}{2}\right| = \left|\frac{x^2}{2(2+\xi)^2}\right| \leqslant \frac{x^2}{2(2-1)^2} = \frac{x^2}{2}\,.$$

Wir können somit $a = \ln 2$ und $b = c = \frac{1}{2}$ wählen.

c) Die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{-x} + \frac{1}{1+x}$ ist beliebig oft differenzierbar mit

$$f'(x) = -e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^2}\,, \qquad f''(x) = e^{-x} + \frac{2}{(1+x)^3}\,, \qquad f'''(x) = -e^{-x} - \frac{6}{(1+x)^4}\,.$$

Daher sind

$$f(\tfrac{1}{2}) = e^{-1/2} + \tfrac{2}{3}\,, \qquad f'(\tfrac{1}{2}) = -e^{-1/2} - \tfrac{4}{9}\,, \qquad f''(\tfrac{1}{2}) = e^{-1/2} + 2\cdot\tfrac{8}{27} = e^{-1/2} + \tfrac{16}{27}$$

und das Taylorpolynom $T_2(f;\frac{1}{2})$ lautet

$$\begin{aligned} T_2(f;\tfrac{1}{2})(x) &= \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(\frac{1}{2})}{k!}(x-\tfrac{1}{2})^k = f(\tfrac{1}{2}) + f'(\tfrac{1}{2})(x-\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}f''(\tfrac{1}{2})(x-\tfrac{1}{2})^2 \\ &= e^{-1/2} + \tfrac{2}{3} + (-e^{-1/2} - \tfrac{4}{9})(x-\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}(e^{-1/2} + \tfrac{16}{27})(x-\tfrac{1}{2})^2\,. \end{aligned}$$

Sei $x \in [0,1]$. Nach dem Satz von Taylor existiert ein ξ zwischen $\frac{1}{2}$ und x mit

$$f(x) = T_2(f;\tfrac{1}{2})(x) + \frac{f^{(2+1)}(\xi)}{(2+1)!}(x-\tfrac{1}{2})^{2+1}\,,$$

also mit

$$\left|f(x) - T_2(f;\tfrac{1}{2})(x)\right| = \frac{|f'''(\xi)|}{3!}\,|x-\tfrac{1}{2}|^3\,.$$

Wegen $\xi \geqslant 0$ ergibt sich

$$\frac{|f'''(\xi)|}{3!} = \frac{1}{6}\Big(e^{-\xi} + \frac{6}{(1+\xi)^4}\Big) = \frac{e^{-\xi}}{6} + \frac{1}{(1+\xi)^4} \leqslant \frac{1}{6} + \frac{1}{(1+0)^4} = \frac{7}{6}\,;$$

demnach gilt die gewünschte Abschätzung z.B. mit $C = \frac{7}{6}$.

Aufgabe 4

a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ ist die Potenzreihe

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

absolut konvergent und damit konvergent, denn es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}|x|^n = \frac{1}{1-|x|} - 1\,.$$

Somit folgt für den Konvergenzradius R dieser Potenzreihe $R \geqslant 1$. Gemäß Satz 13.3 ist f auf $(-1,1)$ differenzierbar und für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ ergibt sich

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n x^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = \frac{1}{1+x} \,.$$

Wegen

$$\ln'(1+x) = \frac{1}{1+x}$$

stimmen die Ableitungen von f und $x \mapsto \ln(1+x)$ überein. Daher unterscheiden sich beide Funktionen nur durch eine additive Konstante. Wegen $f(0) = 0 = \ln(1+0)$ ist diese $= 0$ und die behauptete Identität ist bewiesen.

Bemerkung: Die Reihendarstellung von $g(x) := \ln(1+x)$ um 0 lässt sich auch mit Hilfe des Satzes von Taylor herleiten. Man verwendet dazu $g^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,(1+x)^{-n}$.

b) Bezeichnen wir die Funktion, die durch die Reihe definiert wird, mit f (man beachte, dass f wegen $\sum_{n=2}^{\infty} |(-1)^n \frac{x^n}{n^2-n}| \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} |x|^n = \frac{1}{1-|x|} - 1 - |x|$ wohldefiniert ist!), so gilt für $|x| < 1$

$$f'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n x^{n-1}}{n^2-n} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} \,.$$

Diese Reihe stellt laut a)-Teil die Funktion $x \mapsto \ln(1+x)$ dar, d. h. es ist $f'(x) = \ln(1+x)$. Aufgrund von $(y \ln y - y)' = \ln y$ folgt

$$f(x) = (1+x)\ln(1+x) - (1+x) + c$$

mit einem $c \in \mathbb{R}$. Wegen $f(0) = 0$ ergibt sich $c = 1$. Somit erhält man als Endergebnis

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n-2}}{n^2-n} = (1+x)\ln(1+x) - x \,.$$

Bemerkung: Man kommt auch ohne Differenzieren aus; wegen der Darstellung

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n^2-n} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x^n}{n-1} - \frac{x^n}{n} \right) = x \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

lässt sich der Wert direkt mit Hilfe der Logarithmusreihe aus a) ermitteln.

c) Für jedes $x \in (-1,1)$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\big((1-x)(1+x)\big) = \ln(1-x) + \ln(1+x) \overset{\text{a)}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(-x)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(-1)^n + (-1)^{n+1}}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{-1 + (-1)^{n+1}}{n}}_{=:a_n} x^n \end{aligned}$$

Wie in Abschnitt 13.3 der Vorlesung gesehen, ergibt sich

$$\begin{aligned} f^{(20)}(0) &= 20!\, a_{20} = 20!\, \frac{-1-1}{20} = -2 \cdot 19! \,, \\ f^{(31)}(0) &= 31!\, a_{31} = 0 \,. \end{aligned}$$

Aufgabe 5

Wir suchen Zahlen a_n mit

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, \qquad \text{also} \qquad 1 = (x^2+2x-3)\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n\,.$$

Nun gilt wegen $x^2+2x-3=(x+1)^2-4$

$$\begin{aligned}(x^2+2x-3)\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^{n+2} - 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n \\ &= -4a_0 - 4a_1(x+1) + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-2}-4a_n)(x+1)^n\,.\end{aligned}$$

Nach dem Identitätssatz für Potenzreihen hat diese Potenzreihe den Wert 1 genau dann, wenn die folgenden Gleichungen erfüllt sind:

$$-4a_0 = 1, \qquad -4a_1 = 0, \qquad a_{n-2} - 4a_n = 0 \quad \text{für alle } n \geqslant 2\,.$$

Es folgt: $a_0 = -\frac{1}{4}$, $a_1 = 0$ und $a_n = \frac{1}{4}a_{n-2}$ für $n \geqslant 2$. Vollständige Induktion liefert: $a_{2k+1} = 0$ und $a_{2k} = -(\frac{1}{4})^{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.
Wegen $\sqrt[2k]{|a_{2k}|} = (\frac{1}{4})^{(1+1/k)/2} \xrightarrow{k\to\infty} (\frac{1}{4})^{1/2} = \frac{1}{2}$ und $\sqrt[2k+1]{|a_{2k+1}|} = 0$ ist der Konvergenzradius der Potenzreihe $R = (\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,)^{-1} = (\frac{1}{2})^{-1} = 2$.