

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung
Elektrotechnik und Informationstechnik

11. Übungsblatt

Aufgabe 1

Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Wert.

a) $\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$ b) $\int_0^{\infty} \frac{y \ln y}{\sinh y - y} dy$
c) $\int_0^{\infty} e^{sx} \cos(tx) dx \quad (s < 0, t \in \mathbb{R})$ d) $\int_0^{\infty} e^{-t} \ln(1+t) dt$

Aufgabe 2

Es sei $\lambda > 0$. Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ das uneigentliche Integral

$$I_n(\lambda) := \int_0^{\infty} x^n e^{-\lambda x} dx$$

konvergiert, und berechnen Sie $I_n(\lambda)$.

Hinweis: Drücken Sie $I_n(\lambda)$ mittels $I_n(1)$ aus und finden Sie mit Hilfe von partieller Integration eine Rekursionsformel, wie man $I_{n+1}(1)$ berechnen kann, wenn $I_n(1)$ bekannt ist.

Aufgabe 3

a) Untersuchen Sie die uneigentlichen Integrale auf Konvergenz.

i) $\int_{-1}^1 \ln|x| dx$ ii) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$

b) Existieren die folgenden Grenzwerte?

i) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \ln|x| dx + \int_{\varepsilon}^1 \ln|x| dx \right)$ ii) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx \right)$

Aufgabe 4

a) Zeigen Sie das *Integralkriterium*: Ist die Funktion $f : [2, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ monoton fallend, so sind äquivalent:

$$\int_2^{\infty} f(x) dx \text{ konvergiert} \iff \sum_{n=2}^{\infty} f(n) \text{ konvergiert.}$$

b) Untersuchen Sie, für welche $\alpha > 0$ die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ konvergiert.