Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. S. Wugalter

WS 2013/14
29.01.2014

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

12. Übungsblatt

Aufgabe 1

Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bzw. von $\mathbb{R}^{[-1,1]}$?

a) $\left\{(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,\middle|\, \exists C > 0\, \forall j \in \mathbb{N}: \,|x_j| \leqslant C\right\}$

b) $\left\{f \in \mathbb{R}^{[-1,1]} \,\middle|\, f(0) = 0\right\}$

c) $\left\{f \in \mathbb{R}^{[-1,1]} \,\middle|\, f \text{ hat mind. eine Nullstelle}\right\}$

d) $\left\{f \in \mathbb{R}^{[-1,1]} \,\middle|\, f \text{ ist surjektiv}\right\}$

Aufgabe 2

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und V_1, V_2 seien Untervektorräume von V. Zeigen Sie:

a) $V_1 \cap V_2$ ist ein Untervektorraum von V.

b) $V_1 \cup V_2$ ist im allgemeinen kein Untervektorraum von V.

c) $V_1 + V_2 := \left\{v_1 + v_2 \,\middle|\, v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\right\}$ ist ein Untervektorraum von V.

Aufgabe 3

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n \in V$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie jeweils einen Beweis bzw. ein Gegenbeispiel an.

a) Jede Menge M von Vektoren aus V mit $0 \in M$ ist linear abhängig.

b) Ist $M := \{v_1, \ldots, v_n\}$ linear abhängig, so lässt sich jeder Vektor aus M als Linearkombination der anderen Vektoren aus M darstellen.

c) Existiert ein $v \in V$ mit eindeutiger Darstellung als Linearkombination der $v_1, \ldots, v_n$, dann sind $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig.

d) Sind $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig und $v \in V$, dann sind $v_1 + v, v_2 + v, \ldots, v_n + v$ linear unabhängig.

e) Sind v_1, v_2 linear unabhängig und sind v_1, v_3 linear unabhängig, so sind auch v_2, v_3 linear unabhängig.

Aufgabe 4

a) Im $\mathbb{R}^4$ sind die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ gegeben. Zeigen Sie:

i) Die Vektoren v_1, v_2 und v_3 sind linear abhängig.

— bitte wenden —

ii) Es gibt keine Zahlen $\alpha_1, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ mit $v_2 = \alpha_1 v_1 + \alpha_3 v_3$.

b) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$ so, dass die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ des $\mathbb{R}^3$ linear abhängig sind.

Aufgabe 5

a) Im $\mathbb{C}^4$ sind die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix}$ gegeben.

Vergleichen Sie die Vektorräume:

$$\operatorname{lin}(v_1, v_2, v_3), \qquad \operatorname{lin}(v_1, v_2), \qquad \operatorname{lin}(v_1, v_3), \qquad \operatorname{lin}(v_2, v_3).$$

b) Seien $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie: $\operatorname{lin}(b_1, b_2, b_3) = \mathbb{R}^3$.