

**Höhere Mathematik I für die Fachrichtung
 Elektrotechnik und Informationstechnik
 Lösungsvorschläge zum 13. Übungsblatt**

Aufgabe 1

Mittels Zeilenumformungen bringen wir A auf Zeilennormalform; die Zeilen werden dabei jeweils mit Z_1 , Z_2 und Z_3 bezeichnet:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} &\xrightarrow[\text{tauschen}]{\text{Zeilen}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 \rightarrow -\frac{1}{2}Z_2]{Z_1 \rightarrow -\frac{1}{2}Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{Z_3 \rightarrow Z_3 - 4Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -6 & 6 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 \rightarrow Z_3 + 6Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{Z_3 \rightarrow -\frac{1}{3}Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 \rightarrow Z_2 + 2Z_3]{Z_1 \rightarrow Z_1 + \frac{7}{2}Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

In der Zeilennormalform von A gibt es drei nichtverschwindende Zeilen, also hat A Rang 3. Nun zur Matrix B :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} &\xrightarrow[Z_1 \leftrightarrow Z_3]{Z_3 \rightarrow \frac{1}{2}Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[(j=2,3,4)]{Z_j \rightarrow Z_j - Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & \alpha - 2 & \beta - 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 \rightarrow -\frac{1}{2}Z_2]{Z_3 \rightarrow Z_3 - 2Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & \alpha - 2 & \beta - 2 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[Z_3 \rightarrow \frac{1}{2}Z_3]{Z_4 \rightarrow Z_4 + Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - 10 & \beta - 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1 \rightarrow Z_1 - Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - 10 & \beta - 4 \end{pmatrix} =: \tilde{B} \end{aligned}$$

Fall 1: $\alpha = 10$ und $\beta = 4$. In diesem Fall steht die Zeilennormalform von B bereits da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da hier genau 3 nichtverschwindende Zeilen existieren, hat B in diesem Fall Rang 3.

Fall 2: $\alpha = 10$ und $\beta \neq 4$. Dann erhalten wir

$$\tilde{B} \xrightarrow{Z_4 \rightarrow (\beta - 4)^{-1}Z_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \rightarrow Z_3 + Z_4]{Z_1 \rightarrow Z_1 - 3Z_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und lesen ab: In diesem Fall hat B Rang 4.

Fall 3: $\alpha \neq 10$. Dann setzen wir $\delta := (\beta - 4)/(\alpha - 10)$ und erhalten

$$\tilde{B} \xrightarrow{Z_4 \rightarrow (\alpha-10)^{-1}Z_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \delta \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{Z_1 \rightarrow Z_1 - 6Z_4, Z_2 \rightarrow Z_2 + Z_4 \\ Z_3 \rightarrow Z_3 + 4Z_4}]{Z_1 \rightarrow Z_1 - 6Z_4, Z_2 \rightarrow Z_2 + Z_4, Z_3 \rightarrow Z_3 + 4Z_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 - 6\delta \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 + 4\delta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \delta \end{pmatrix}$$

Die Matrix B besitzt somit auch in diesem Fall Rang 4.

Aufgabe 2

a) Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_4 &= 3 \\ x_3 + 4x_4 &= 1 \\ x_5 &= 2 \end{aligned}$$

liegt bereits in Zeilennormalform vor:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

(Stellen wir uns hier das Endergebnis beim Lösungsalgorithmus vor, so wären hier womöglich noch Nullzeilen, die aber einfach ignoriert werden dürfen). Diese Treppe verläuft nicht regelmäßig. Nun verwenden wir den (-1) -Ergänzungstrick. In jeder Spalte der Koeffizientenmatrix sollte eine neue Stufe anfangen! Dies erzwingen wir, indem wir zwei Zeilen der Form $0 \dots 0 \ -1 \ 0 \dots 0$ einfügen:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Jetzt können wir die Lösung ablesen: die beiden *Spalten* mit den neu hinzugekommenen Stufen (an den -1 -en erkennbar) sind eine Basis des homogenen Lösungsraums, und die letzte *Spalte* ist eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung! Gemäß Folgerung (1) in 14.11 ergibt sich für die allgemeine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

Das Einfügen jener -1 -Zeilen ist nichts anderes als das Setzen von freien Parametern. Betrachten wir das ursprüngliche Gleichungssystem mit Variablen

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_4 &= 3 \\ x_3 + 4x_4 &= 1 \\ x_5 &= 2, \end{aligned}$$

setzen zwei Parameter (aber mit Minuszeichen!)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_4 &= 3 \\ x_2 &= -\lambda \\ x_3 + 4x_4 &= 1 \\ x_4 &= -\mu \\ x_5 &= 2, \end{aligned}$$

lassen in jeder Zeile nur eine Variable stehen

$$\begin{aligned}x_1 &= 3 + \lambda + 2\mu \\x_2 &= -\lambda \\x_3 &= 1 + 4\mu \\x_4 &= -\mu \\x_5 &= 2\end{aligned}$$

und schreiben vektoriell

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

b) Um das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 0 \\4x_1 - 8x_2 + 3x_3 - 3x_4 + x_5 &= 2 \\-2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - x_4 + 4x_5 &= -3 \\x_1 - 2x_2 - 3x_4 + 4x_5 &= -1\end{aligned}$$

zu lösen, bestimmen wir die Zeilenormalform der zugehörigen erweiterten Matrix

$$\begin{aligned}\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -8 & 3 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & -3 & 4 & -1 \end{array} \right) &\xrightarrow{\substack{Z_2 \rightarrow Z_2 - 4Z_1 \\ Z_3 \rightarrow Z_3 + 2Z_1 \\ Z_4 \rightarrow Z_4 - Z_1}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 & -1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\substack{Z_2 \rightarrow -Z_2 \\ Z_3 \rightarrow -\frac{1}{3}Z_3 \\ Z_4 \rightarrow Z_4 - Z_2}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & -3 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{Z_4 \rightarrow Z_4 + 3Z_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\substack{Z_1 \rightarrow Z_1 - Z_2 \\ Z_2 \rightarrow Z_2 + Z_3}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)\end{aligned}$$

und verwenden den (-1) -Ergänzungstrick, d.h. wir lassen Nullzeilen in der Zeilenormalform weg und ergänzen Zeilen mit -1 und sonst Nullen, so dass auf der Diagonalen nur ± 1 steht:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Nun können wir die allgemeine Lösung $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$ des Gleichungssystems ablesen:

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

Aufgabe 3

Wir bringen die erweiterte Matrix $(A|y)$ durch Zeilenumformungen auf Zeilennormalform:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha - 1 & \beta + 2 & 3 \end{array} \right) &\xrightarrow{Z_3 \rightarrow Z_3 - Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha & \beta & 2 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\substack{Z_1 \rightarrow Z_1 + Z_2 \\ Z_3 \rightarrow Z_3 - \alpha Z_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 + \alpha & 2 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \beta - \alpha^2 & 2 - \alpha \end{array} \right) =: (*) \end{aligned}$$

1. Fall: $\beta \neq \alpha^2$. Dann setzen wir zur Abkürzung $\gamma := (2 - \alpha)/(\beta - \alpha^2)$ und erhalten

$$(*) \xrightarrow{Z_3 \rightarrow (\beta - \alpha^2)^{-1} Z_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 + \alpha & 2 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{Z_1 \rightarrow Z_1 - (2 + \alpha)Z_3 \\ Z_2 \rightarrow Z_2 - \alpha Z_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 - (2 + \alpha)\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 1 - \alpha\gamma \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \end{array} \right)$$

Man sieht: In diesem Fall ist das Gleichungssystem $Ax = y$ eindeutig lösbar; die Lösung $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3$ ist gegeben durch $x_1 = 2 - (2 + \alpha)\gamma$, $x_2 = 1 - \alpha\gamma$ und $x_3 = \gamma$.

2. Fall: $\beta = \alpha^2$ und $\alpha \neq 2$. Dann ergibt sich

$$(*) \xrightarrow{Z_3 \rightarrow (2 - \alpha)^{-1} Z_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 + \alpha & 2 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Der Rang der erweiterten Matrix ist größer als der von A . Folglich besitzt das lineare Gleichungssystem $Ax = y$ in diesem Fall keine Lösung.

3. Fall: $\beta = \alpha^2$ und $\alpha = 2$. Dann steht die Zeilennormalform bereits da:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Der Rang der erweiterten Matrix und der Rang von A stimmen überein, das Gleichungssystem ist also lösbar. Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung $Ax = y$ ist

$$x_p = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alle Lösungen des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$ erhält man, indem man $x_3 = \lambda$ setzt [oder den (-1) -Ergänzungstrick verwendet]:

$$x_h = \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{K}).$$

Die allgemeine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems $Ax = y$ ist folglich

$$x = x_p + x_h = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{K}).$$

Aufgabe 4

Definiere

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ -1-i \\ 1+i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ -c-i \\ c^2+2ci \end{pmatrix}, \quad v_4 := \begin{pmatrix} i \\ i-1+c \\ -c-i \\ 2i \end{pmatrix}.$$

Gesucht sind alle $c \in \mathbb{C}$, für welche das lineare Gleichungssystem $\sum_{j=1}^4 x_j v_j = y$ eine Lösung $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ hat. Wir wenden Zeilenumformungen auf die erweiterte Matrix an:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & i & 1 \\ i & -1-i & -i & i-1+c & 5i-1 \\ 0 & 1+i & -c-i & -c-i & 1-i \\ 2 & 0 & c^2+2ci & 2i & c^2 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{Z_2 \rightarrow Z_2 - iZ_1 \\ Z_4 \rightarrow Z_4 - 2Z_1}]{Z_2 \rightarrow Z_2 - iZ_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & -1-i & -i & i+c & 4i-1 \\ 0 & 1+i & -c-i & -c-i & 1-i \\ 0 & 0 & c^2+2ci & 0 & c^2-2 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{Z_3 \rightarrow Z_3 + Z_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & -1-i & -i & i+c & 4i-1 \\ 0 & 0 & -c-2i & 0 & 3i \\ 0 & 0 & c^2+2ci & 0 & c^2-2 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{Z_4 \rightarrow Z_4 + cZ_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & -1-i & -i & i+c & 4i-1 \\ 0 & 0 & -c-2i & 0 & 3i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c^2+3ci-2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Dieses lineare Gleichungssystem ist unlösbar für $0 \neq c^2 + 3ci - 2 = (c+i)(c+2i)$, also für $c \in \mathbb{C} \setminus \{-2i, -i\}$. Wegen der dritten Zeile ist die Lösungsmenge auch für $c = -2i$ leer. Nur im Fall $c = -i$ ist das lineare Gleichungssystem lösbar. Fazit: Genau für $c = -i$ gilt $y \in U$.

Aufgabe 5

- a) Wegen $\phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ mit $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ist ϕ nach Beispiel (1) in 14.15 linear. Es gilt

$$\text{Kern } \phi = \{x \in \mathbb{R}^2 : \phi(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^2 : Ax = 0\} = \text{Kern } A = \text{lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Letzteres liest man unter Verwendung des (-1) -Ergänzungstricks der Zeilennormalform $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ von A ab. Gemäß Definition ist

$$\text{Bild } \phi = \{\phi(x) : x \in \mathbb{R}^2\} = \{Ax : x \in \mathbb{R}^2\} = \text{Bild } A = \text{lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\},$$

weil Bild A der lineare Aufspann der Spalten von A ist.

- b) Zunächst bringen wir A mittels Zeilenumformungen auf Zeilennormalform:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{Z_3 \rightarrow -\frac{1}{2}Z_3 + \frac{1}{3}Z_1 \\ Z_1 \rightarrow -\frac{1}{3}Z_1}]{Z_2 \rightarrow Z_2 + \frac{1}{3}Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & -1/2 & -1/3 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 \rightarrow Z_3 + \frac{1}{2}Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe des (-1) -Ergänzungstricks lesen wir ab:

$$\text{Kern } A = \text{lin}\left\{\begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} = \text{lin}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}.$$

Folglich ist $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von Kern A und es gilt $\dim \text{Kern } A = 1$. Die Dimensionsformel liefert $\dim \text{Bild } A = 3 - \dim \text{Kern } A = 3 - 1 = 2$. Da die beiden Vektoren $Ae_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, Ae_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Bild } A$ linear unabhängig sind, bilden diese eine Basis von Bild A , also

$$\text{Bild } A = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$