Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Silvana Avramska-Lukarska

WS 2015/16
20.10.2015

Höhere Mathematik I

für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 1. Übungsblatt

Aufgabe 1:

(a) Aussage A ist falsch, Aussage B ist wahr und deshalb ist $A \wedge B$ falsch.

(b) Aussage A ist falsch, Aussage C ist falsch und deshalb ist $A \wedge C$ falsch.

(c) Aussage A ist falsch, Aussage E ist falsch und deshalb ist $A \vee E$ falsch.

(d) Aussage E ist falsch, Aussage F ist wahr und deshalb ist $E \Rightarrow F$ wahr.

(e) Aussage B ist wahr, Aussage E ist falsch und deshalb ist $B \Leftrightarrow E$ falsch.

(f) Aussage B ist wahr, Aussage F ist wahr und deshalb ist $B \Leftrightarrow F$ wahr.

(g) Aussage D ist wahr, Aussage E ist falsch und deshalb ist $D \Rightarrow E$ falsch.

(h) Aussage B ist wahr, Aussage E ist falsch. Folglich sind $\neg B$ falsch und $\neg E$ wahr. Damit ist $\neg B \Rightarrow \neg E$ wahr.

Aufgabe 2:

(a) Die Aussage “Alle Deutschen mögen Fußball und trinken gerne Bier” entsteht aus den beiden Teilaussagen

$$A: \text{“Alle Deutschen mögen Fußball.”}$$
$$B: \text{“Alle Deutschen trinken gerne Bier.”}$$

mittels der logischen Verknüpfung $\wedge$ (und). Negation ergibt

$$\neg(A \wedge B) \;\Leftrightarrow\; \neg A \vee \neg B,$$

also lautet die Negation obiger Aussage

“Es gibt (mindestens) einen Deutschen, der keinen Fußball mag,
oder es gibt (mindestens) einen Deutschen, der kein Bier gerne trinkt“

bzw. kurz

”Es gibt (mindestens) einen Deutschen, der keinen Fußball mag oder kein Bier gerne trinkt.”

(b) Betrachten wir die drei Aussagen

$$A: \text{“Ich habe Zeit.”},$$
$$B: \text{“Ich habe Geld”},$$
$$C: \text{“Ich gehe ins Kino”},$$

dann entspricht die Aussage “Ich gehe immer ins Kino, wenn ich Zeit und Geld habe.”: $A \wedge B \Rightarrow C$. Wegen $\neg(E \Rightarrow C) \;\Leftrightarrow\; E \wedge \neg C$ (siehe Abschnitt 1.3 der Vorlesung) ist

$$\neg(\underbrace{A \wedge B}_{=E} \Rightarrow C) \quad \Leftrightarrow \quad \big(\underbrace{(A \wedge B)}_{=E} \wedge \neg C\big).$$

In Worten: “Ich habe Zeit und Geld, und ich gehe (dennoch) nicht ins Kino”.

(c) Die Menge aller Übungsblätter werde mit U bezeichnet. Wir wollen die Aussage $\neg\big(\exists x \in U : A(x)\big)$ negieren, wobei die Aussageform $A(x)$ durch

$$A(x) : \text{“Alle sind mit } x \text{ zufrieden.”}$$

gegeben ist. Wegen

$$\neg\Big(\neg\big(\exists x \in U : A(x)\big)\Big) \Leftrightarrow \exists x \in U : A(x)$$

ist die Negation der ursprünglichen Aussage: “Es gibt ein übungsblatt, mit dem alle zufrieden sind.”

Aufgabe 3: Die Schalter $S1$ und $S2$ sind parallel geschaltet, d.h. hier handelt es sich um eine ODER-Schaltung $S1 \vee S2$. Der Schalter $S3$ ist dahinter geschaltet, d.h. hier handelt es sich um eine UND-Schaltung $S1 \wedge (S1 \vee S2)$. Wir stellen eine Wahrheitstafel auf:

$S1$	$S2$	$S3$	$S1 \vee S2$	$S3 \wedge (S1 \vee S2)$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Damit die Lampe L leuchtet, müssen entweder Schalter $S2$ und Schalter $S3$ oder Schalter $S1$ und Schalter $S3$, oder Schalter $S1$, Schalter $S2$ und Schalter $S3$ geschlossen sein.

Aufgabe 4: Die Äquivalenz der drei Aussagen (i), (ii), (iii) erhalten wir aus der Implikationskette (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i).

“(i) $\Rightarrow$ (ii)”: Es gelte $M_1 \subseteq M_2$. Um nun die Gleichheit der beiden Mengen $M_1 \cap M_2$ und M_1 zu zeigen, brauchen wir nur die eine Inklusion $M_1 \subset M_1 \cap M_2$ einzusehen (die umgekehrte Inklusion gilt ohnehin). Sei dazu $x \in M_1$. Wegen $M_1 \subset M_2$ ist auch $x \in M_2$. Dann ist aber x sowohl in M_1 als auch in M_2, also in $M_1 \cap M_2$.

“(ii) $\Rightarrow$ (iii)”: Hier müssen wir unter der Voraussetzung $M_1 \cap M_2 = M_1$ nur die Inklusion $M_1 \cup M_2 \subset M_2$ nachweisen. Sei also $x \in M_1 \cup M_2$. Ist $x \in M_2$, so ist nichts zu zeigen. Ist $x \in M_1 = M_1 \cap M_2$, so ist $x \in M_2$, was zu zeigen war.

“(iii) $\Rightarrow$ (i)”: Sei hierzu $x \in M_1$. Dann ist jedenfalls $x \in M_1 \cup M_2 = M_2$.