Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Silvana Avramska-Lukarska

WS 2015/16
28.10.2015

Höhere Mathematik I

für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 2. Übungsblatt

Aufgabe 1:

(a) Der Ausdruck $f_1(x) = \frac{1}{1-x}$ ist überall da definiert, wo der Nenner nicht verschwindet, also $D_1 = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Polynome wie $f_2(x) = x^2 + x + 1$ und $f_3 = x^2 + 1$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, also $D_2 = D_3 = \mathbb{R}$.

f_1 ist injektiv, denn für alle $x, y \in D_1$ mit $x \neq y$ gilt

$$x \neq y \quad \Leftrightarrow \quad 1 - x \neq 1 - y \quad \overset{x,y\neq 1}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{1-x} \neq \frac{1}{1-y} \quad \Leftrightarrow \quad f_1(x) \neq f_2(y).$$

$f_1 : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ ist nicht surjektiv, da es kein x gibt mit $f_1(x) = 0$ ($f_1(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{1-x} = 0 \Leftrightarrow 1 = 0(1-x) \Leftrightarrow 1 = 0$, Widerspruch!). Betrachten wir aber $f_1 : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, können wir zeigen, dass f_1 auch surjectiv ist. Um dies zu begründen, müssen wir zeigen, dass zu jedem $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ein $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ gibt mit $f_1(x) = y$. Sei $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ist $x = 1 - \frac{1}{y} \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ gesetzt, so gilt $f_1(x) = y$.
Insgesamt haben wir gezeigt, dass $f_1 : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bijektiv ist und daher die Umkehrfunktion $f_1^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$ existiert. Dem Beweis der Surjektivität von f_2 entnehmen wir $f_1^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}, f_1^{-1}(y) = 1 - \frac{1}{y}$.

Die Abbildung f_2 ist nicht injektiv, da $f_2(0) = 1 = f_2(-1)$.

f_2 ist nicht surjektiv, da es kein $x \in \mathbb{R}$ gibt mit $f_2(x) = b$ für $b < \frac{3}{4}\Big(f_2(x) = x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \forall x \in \mathbb{R}\Big)$.
Die Abbildung f_3 ist weder injektiv (da $f_3(-a) = f_3(a)$ für alle $a \in \mathbb{R}$) noch surjektiv (da es gibt kein $x \in \mathbb{R}$ mit $f_3(x) = b$ für $b < 0$).

(b) Sei $X = \mathbb{R} \setminus \{1\}, Y = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\begin{aligned} f :& \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}, \qquad & f(x) = \frac{1}{1-x}, \\ g :& \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}, \qquad & g(x) = x^2 + 1. \end{aligned}$$

Es gilt $f \circ g : \underbrace{\mathbb{R} \setminus \{0\}}_{=Y} \to \underbrace{\mathbb{R} \setminus \{0\}}_{=Y}, \quad g \circ f : \underbrace{\mathbb{R} \setminus \{1\}}_{=X} \to \underbrace{\mathbb{R} \setminus \{1\}}_{=X}$ und

$$\big(f \circ g\big)(x) = f\big(g(x)\big) = f\big((x^2 + 1)\big) = \frac{1}{1 - (x+1)^2} \quad \forall x \in \underbrace{\mathbb{R} \setminus \{0\}}_{=Y},$$

$$\big(g \circ f\big)(x) = g\big(f(x)\big) = g\Big(\frac{1}{1-x}\Big) = \frac{1}{(1-x)^2} + 1 \quad \forall x \in \underbrace{\mathbb{R} \setminus \{1\}}_{=X},$$

d.h.

$$\big(f \circ g\big)(x) = \big(g \circ f\big)(x)$$

ist nicht für jedes $x \in \underbrace{\mathbb{R} \setminus \{0,1\}}_{=X \cap Y}$ erfüllt.

Aufgabe 2:

(a) Sei $x \in \mathbb{R}$. Betrachte die Fallunterscheidung:

(i) $x \geq 5$: Es gilt dann $|x-5| = x-5$ und damit:

$$|x-5| \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad x-5 \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 7$$

(ii) $x < 5$: Es gilt dann $|x-5| = 5-x$ und damit:

$$|x-5| \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad 5-x \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad 3 \leq x$$

Insgesamt ist also das Intervall $M = [5,7] \cup [3,5) = [3,7]$ die Lösungsmenge.

(b) Sei wieder $x \in \mathbb{R}$. Es gilt $|4-3x| = 3\left|\frac{4}{3} - x\right|$. Es bietet sich nochmals eine Fallunterscheidung an:

(i) $x \geq \frac{4}{3}$: Es gilt dann $\left|\frac{4}{3} - x\right| = x - \frac{4}{3}$ und damit:

$$|4-3x| = 3\left|\frac{4}{3} - x\right| > 2x+10 \quad \Leftrightarrow \quad 3\left(x - \frac{4}{3}\right) > 2x+10 \quad \Leftrightarrow \quad x > 14$$

(ii) $x < \frac{4}{3}$: Es gilt dann $\left|\frac{4}{3} - x\right| = \frac{4}{3} - x$ und damit:

$$|4-3x| = 3\left|\frac{4}{3} - x\right| > 2x+10 \quad \Leftrightarrow \quad 3\left(\frac{4}{3} - x\right) > 2x+10 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{6}{5} > x$$

Insgesamt ist also die Lösungsmenge $M = (-\infty, -\frac{6}{5}) \cup (14, \infty)$.

(c) Sei $x \in \mathbb{R}$. Es gilt:

$$\begin{aligned} |x-3| = |x+2| \quad &\Leftrightarrow \quad (x-3)^2 = (x+2)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - 6x + 9 = x^2 + 4x + 4 \\ &\Leftrightarrow \quad 5 = 10x \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist also $M = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

(d) Sei $x \in \mathbb{R}$. Es gilt:

$$\begin{aligned} |2 - |2-x|| = 2 \quad &\Leftrightarrow \quad (2 - |2-x|)^2 = 4 \\ &\Leftrightarrow \quad 4 - 4\,|2-x| + |2-x|^2 = 4 \\ &\Leftrightarrow \quad |2-x|^2 = 4\,|2-x| \end{aligned}$$

Offenbar ist $x = 2$ eine Lösung dieser Gleichung. Wir können also für weitere Rechnungen $x \neq 2$ annehmen. Es gilt dann:

$$|2 - |2-x|| = 2 \quad \Leftrightarrow \quad |2-x| = 4$$

Eine Fallunterscheidung liefert:

(i) $x > 2$: Dann gilt $|2-x| = x-2$ und somit

$$|2-x| = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x - 2 = 4 \Leftrightarrow x = 6.$$

(ii) $x < 2$: Dann gilt $|2-x| = 2-x$ und somit

$$|2-x| = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 2 - x = 4 \Leftrightarrow x = -2.$$

Damit lautet die Lösungsmenge $M = \{-2, 2, 6\}$

Aufgabe 3: Wir erkennen sofort, dass $A := \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ nach oben durch 1 beschränkt ist. Außerdem ist $1 = \frac{1}{1} \in A$. Damit folgt: Supremum und Maximum von A existieren und es ist $\sup A = \max A = 1$.
Nun zur unteren Schranke. Wir behaupten: $\inf A = 0$. Es ist klar, dass 0 eine untere Schränke von A ist. Nun zeigen wir, dass 0 auch die größte untere Schranke ist. Dazu nehmen wir an, dass es eine größere untere Schranke $\varepsilon > 0$ gibt und führen dies zu einem Widerspruch. Es soll also gelten

$$\varepsilon \leq \frac{1}{n} \quad \Leftrightarrow \quad n \leq \frac{1}{\varepsilon}.$$

Dies kann jedoch nicht sein, weil die Menge der natürlichen Zahlen nicht nach oben beschränkt ist. Also ist die Annahme falsch, und es gilt $0 = \inf A$. Da $0 \notin A$ [Annahme: $0 \in A$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} = 0 \Leftrightarrow 1 = 0 \cdot n = 0$, Widerspruch!] ist, existiert das Minimum von A nicht.

Mit quadratischer Ergänzung

$$x^2 + 2x + 8 = x^2 + 2x + 1 + 7 = \Big(x+1\Big)^2 + 7.$$

erkennen wir, dass

$$B = \Big\{x^2 + 2x + 8 : 0 \leq x < 9\Big\} \overset{y=x+1}{=} \Big\{y_2 + 7 : 1 \leq y < 10\Big\}$$

Wegen $y^2 + 7 \geq 8$ für $y \in [1, 9)$ und $1^2 + 7 = 8 \in B$ folgt

$$\min \Big\{y_2 + 7 : 1 \leq y < 10\Big\} = \inf \Big\{y_2 + 7 : 1 \leq y < 10\Big\} = 8.$$

Nun zur oberen Schranke. Wir behaupten: $\sup B = 107$. Es ist klar, dass 107 eine obere Schranke von B ist, da

$$y^2 + 7 < (10)^2 + 7 \quad \text{für } 1 \leq y < 10.$$

Jetzt zeigen wir, dass 107 auch die kleinste obere Schranke von B ist. Dazu nehmen wir an, dass es eine kleinere obere Schranke γ gibt. Wir müssen zeigen, dass es dann ein Element $y \in B$ gibt mit $y^2 + 7 = \gamma$. Sei $y = \sqrt{\gamma - 7}$. Es gilt $y^2 + 7 = \gamma$. Da $\gamma < 107$, folgt $y < \sqrt{107 - 7} = 10$, d.h. $y \in B$, Widerspruch! D.h. γ ist keine obere Schranke von B und folglich $\sup B = 107$.
Als Nächstes zeigen wir, dass Maximum von B nicht existiert. Dazu nehmen wir an, dass $\max \Big\{y_2 + 7 : 1 \leq y < 10\Big\} = \sup \Big\{y_2 + 7 : 1 \leq y < 10\Big\} = 107$. D.h es muss ein $y \in [1, 10)$ geben mit $y^2 + 7 = 107$. Da aber

$$y^2 + 7 = 107 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm 10$$

und $\pm 10 \notin [1, 10)$, erhalten wir einen Widerspruch.

Aufgabe 4: Wird in der Übung am 6.11.2015 besprochen.