Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Silvana Avramska-Lukarska

WS 2015/16
3.11.2015

Höhere Mathematik I

für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

3. Übungsblatt

Aufgabe 1: Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(i) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$;

(ii) $n^3 - n$ ist durch 3 telibar;

(iii) $\forall n \geq 5 : 2^n > n^2$.

Aufgabe 2: Mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes

(a) berechnen Sie

$$\sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} (-1)^k 3^{k+1};$$

(b) zeigen Sie, dass für jede reelle Zahl $x \geq 0$ und jede natürliche Zahl $n \geq 2$ gilt:

$$(1+x)^n \geq \frac{n^2}{4} x^2 .$$

Aufgabe 3:

(a) Gegeben seien die zwei komplexen Zahlen $z_1 = 3 - i$ und $z_2 = -1 + 2i$. Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil sowie den Betrag von:

(i) z_1^3;

(ii) $z_1 \cdot \bar{z}_2$.

(b) Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene:

(i) $A = \{z \in \mathbb{C} : |z + 1 + i| = |z - 3 - 3i|\}$;

(ii) $B = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| \geq 1 \text{ und } |z - 1 - 2i| < 3\}$.

(c) Bestimmen Sie alle Lösungen in $\mathbb{C}$ zu folgenden Gleichungen:

(i) $z^2 - 2z + 3 = 0$;

(ii) $z^2 = |z|^2$.

Aufgabe 4: Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen Wert a konvergiert, und geben Sie zu $\varepsilon = 10^{-10}$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ an so, dass für alle $n > n_0$ stets $|a_n - a| < \varepsilon$ gilt:

(a) $a_n = \frac{n+1}{n^2+1}$;

(b) $a_n = 2^{1/n}$.

Die Aufgaben werden in der Übung am 6.11.2015 besprochen.