Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Silvana Avramska-Lukarska

WS 2015/16
3.11.2015

Höhere Mathematik I

für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 3. Übungsblatt

Aufgabe 1:

(a) Beweis durch vollständige Induktion:
IA: Wegen

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$$

ist

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

für $n = 1$ richtig.
IS: Sei $n \in \mathbb{N}$. Für dieses n gelte $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ (IV). Dann folgt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \overset{\text{(IV)}}{=} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}.\end{aligned}$$

(b) Wir verwenden wieder vollständige Induktion.
IA: Für $n = 1$ stimmt die behauptete Aussage, denn $1^3 - 1 = 0$ ist durch 3 teilbar.
IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Fü dieses n gelte die Behauptung, sei also $n^3 - n$ durch 3 teilbar, etwa $n^3 - n = 3l$ für ein $l \in \mathbb{Z}$. (IV)
Zu zeigen ist, dass dann auch $(n+1)^3 - (n+1)$ durch 3 teilbar ist. Es gilt:

$$\begin{aligned}(n+1)^3 - (n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 \\ &= \underbrace{n^3 - n}_{\overset{\text{(IV)}}{=} 3l} + 3(n^2 + n) = 3(\underbrace{l + n^2 + n}_{\in \mathbb{Z}}).\end{aligned}$$

(c) IA: Für $n = 5$ gilt $2^n = 2^5 = 32$ und $n^2 = 5^2 = 25$. Also ist die behauptete Ungleichung für $n = 5$ wahr.
IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 5$ beliebig. Für dieses n gelte $2^n > n^2$ (IV). Dann folgt

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \overset{\text{(IV)}}{>} 2 \cdot n^2.$$

Zu zeigen verbleibt: $2n^2 \geq (n+1)^2 \;\Leftrightarrow\; 2n^2 \geq n^2 + 2n + 1 \;\Leftrightarrow\; n^2 \geq 2n + 1$. Die Gültigkeit der letzten Ungleichung sehen wir folgendermaßen

$$n \geq 5 \;\Rightarrow\; n \geq 3 \;\Rightarrow\; n^2 \geq 3n \;\Rightarrow\; n^2 \geq 2n + n \;\Rightarrow\; n^2 \geq 2n + 1\,.$$

Aufgabe 2:

(a) Es ist

$$\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}(-1)^k 3^{k+1} = 3\cdot\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}(-3)^k\cdot 1^{4-k} = 3(-3+1)^4 = 3\cdot 16 = 48.$$

(b) Sei $x \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Nach dem binomischen Lehrsatz gilt

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k \geq \binom{n}{2}x^2,$$

weil alle Summanden ≥ 0 sind. Ferner ist

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n}{2}(n-1) \overset{n\geq 2}{\geq} \frac{n}{2}\cdot\frac{n}{2} = \frac{n^2}{4}.$$

Hiermit folgt

$$(1+x)^n \geq \frac{n^2}{4}x^2.$$

Aufgabe 3:

(a) Wir berechnen vorbereitend:

$$|z_1| = |3-i| = \sqrt{3^2+1^1} = \sqrt{10}, \qquad |z_2| = |-1+2i| = \sqrt{(-1)^2+2^2} = \sqrt{5}$$

(i) Es gilt

$$z_1^3 = (3-i)^3 = 3^3 - 3\cdot 3^2 i + 3\cdot 3(i)^2 - (i)^3 = 18 - 26i$$

und damit $Re(z^3) = 18$, $Im(z^3) = -26$, $\left|z^3\right| = |z|^3 = 10\sqrt{10}$.

(ii) Es gilt

$$z_1\cdot\bar{z}_2 = (3-i)\cdot(-1-2i) = -3-6i+i+2(i)^2 = -5-5i$$

und damit $Re(z_1\cdot\bar{z}_2) = -5$, $Im(z_1\cdot\bar{z}_2) = -5$, $|z_1\cdot\bar{z}_2| = |z_1|\cdot|\bar{z}_2| = |z_1|\cdot|z_2| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

(b) (i) Sei $z = x+iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
z \in A \quad &\Leftrightarrow \quad |z+1+i| = |z-3-3i| \\
&\Leftrightarrow \quad |(x+1)+i(y+1)|^2 = |(x-3)+i(y-3)|^2 \\
&\Leftrightarrow \quad (x+1)^2+(y+1)^2 = (x-3)^2+(y-3)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2+2x+1+y^2+2y+1 = x^2-6x+9+y^2-6y+9 \\
&\Leftrightarrow \quad 2x+2y+2 = -6x-6y+18 \\
&\Leftrightarrow \quad 8y = -8x+16 \quad \Leftrightarrow \quad y = 2-x,
\end{aligned}$$

d.h. $A = \{z \in \mathbb{C} |\, \mathrm{Im}(z) = 2 - \mathrm{Re}(z)\}$. Also ist A eine Gerade in der komplexen Zahlenebene. Siehe auch Abbildung (1).

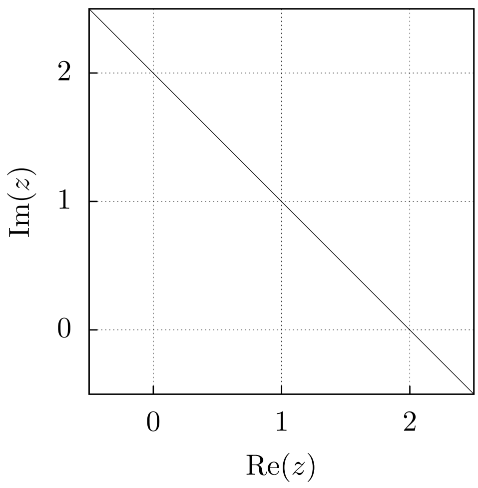

Abbildung 1: Menge A

(ii) Es gilt:

$$\begin{aligned} B &= \{z \in \mathbb{C} : |z - i| \geq 1 \quad \text{und} \quad |z - 1 - 2i| < 3\} \\ &= \{z \in \mathbb{C} : |z - i| \geq 1\} \cap \{z \in \mathbb{C} : |z - 1 - 2i| < 3\} \\ &= \{z \in \mathbb{C} : |z - i| < 1\}^c \cap \{z \in \mathbb{C} : |z - 1 - 2i| < 3\} \\ &= \{z \in \mathbb{C} : |z - 1 - 2i| < 3\} \setminus \{z \in \mathbb{C} : |z - i| < 1\} \end{aligned}$$

Also ist B die offene Kugel um $1 + 2i$ mit Radius 3 ohne die offene Kugel um i mit Radius 1. Siehe auch Abbildung (2).

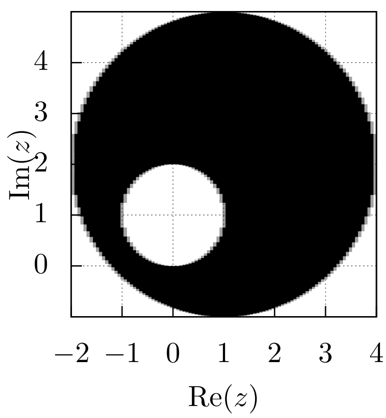

Abbildung 2: Menge B

(c) (i) Es gilt $z^2 - 2z + 3 = (z-1)^2 + 2$. Die Gleichung $z^2 - 2z + 3 = 0$ ist also genau dann erfüllt, wenn $(z-1)^2 = -2$. Dies bedeutet $z - 1 = i\sqrt{2}$ oder $z - 1 = -i\sqrt{2}$, also hat die Gleichung die zwei Lösungen $z_1 = 1 + i\sqrt{2}$ und $z_2 = 1 - i\sqrt{2}$.

(ii) Mit dem Ansatz $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
z^2 = |z|^2 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 + 2xiy + (iy)^2 = x^2 + y^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2xiy - y^2 = x^2 + y^2 \\
&\overset{(*)}{\Leftrightarrow} \quad x^2 - y^2 = x^2 + y^2 \quad \text{und} \quad 2xy = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad -2y^2 = 0 \quad \text{und} \quad \big(x = 0 \quad \text{oder} \quad y = 0\big) \\
&\Leftrightarrow \quad y = 0 \quad \text{und} \quad \big(x = 0 \quad \text{oder} \quad y = 0\big) \\
&\Leftrightarrow \quad y = 0.
\end{aligned}$$

[In $(*)$ verwenden wir, dass zwei komplexe Zahlen genau dann gleich sind, wenn sie den selben Real- und Imaginärteil besitzen.]
Also ist $z^2 = |z|^2$ genau dann erfüllt, wenn $\operatorname{Im}(z) = 0$ bzw. $z \in \mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 4: Wir zeigen zuerst, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{1}{\varepsilon}$$

für $n \in \mathbb{N}$ gilt $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0(\varepsilon) := \frac{1}{\varepsilon}$.
Mit $\varepsilon = 10^{10}$ gilt $|\frac{1}{n} - 0| < 10^{-10}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0(\varepsilon) := 10^{10}$.

(a) *Behauptung*: a_n konvergiert gegen $a = 0$.
Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen

$$|a_n - 0| = \left|\frac{n+1}{n^2+1} - 0\right| = \frac{n+1}{n^2+1} < \frac{2n}{n^2} = 2 \cdot \frac{1}{n},$$

und nach Obigem $\frac{1}{n} \to 0$, folgt aus Satz 6.3 (1), dass $a_n \to 0$. D.h. mit $\varepsilon = 10^{-10}$ gilt $|a_n - 0| < 10^{-10}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0(\varepsilon) := 10^{10}$.

(b) *Behauptung*: $a_n = 2^{1/n} = \sqrt[n]{2}$ konvergiert gegen $a = 1$.
Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach Satz 6.3. (4) folgt aus $b_n \to a, c_n \to a$ und $b_n \leq a_n \leq c_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, dass a_n gegen a konvergiert. Seien für $n \in \mathbb{N}$ $b_n = 1$ und $c_n = \frac{1}{n} + 1$. Es ist klar, dass $b_n \to 1$ und $c_n \to 1$. Es bleibt zu zeigen, dass

$$b_n \leq \sqrt[n]{2} \quad \text{und} \quad \sqrt[n]{2} \leq c_n \quad \text{für fast alle } n \in \mathbb{N}.$$

Die erste Ungleichung ist für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr. Wegen

$$2 = \left(\sqrt[n]{2}\right)^n = \left(1 + \left(\sqrt[n]{2} - 1\right)\right)^n \overset{(BU)}{\geq} 1 + n\left(\sqrt[n]{2} - 1\right) \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[n]{2} \leq \frac{1}{n} + 1,$$

ist auch die zweite Ungleichung für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr. Folglich konvergiert $a_n = \sqrt[n]{2}$ gegen $a = 1$. D.h. mit $\varepsilon = 10^{-10}$ gilt $|a_n - 1| < 10^{-10}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0(\varepsilon) := 10^{10}$.