KIT Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Silvana Avramska-Lukarska

WS 2015/16
11.11.2015

Höhere Mathematik I

für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 4. Übungsblatt

Aufgabe 1:

(i) Offenbar gilt
$$a_{2k} = (2k)^{2k} \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$
Also ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht nach oben beschränkt, daher ergibt sich $\limsup\limits_{n\to\infty} = \infty$. Weiter gilt
$$a_{2k+1} = (2k+1)^{-(2k+1)} = \frac{1}{(2k+1)^{2k+1}} \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$
Da $\frac{1}{(2k+1)^{(2k+1)}}$ eine Teilfolge von $\frac{1}{n^n}$ ist, und $\frac{1}{n^n}$ gegen 0 konvergiert, folgt $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{(2k+1)^{2k+1}} = 0$. Damit ist 0 ein Häufungspunkt der Folge. Weitere Häufungspunkte gibt es nicht, denn zu jedem anderen Punkt kann man eine so kleine Umgebung wählen, dass nur endlich viele Folgeglieder a_n in ihr liegen. Somit ist $\liminf\limits_{n\to\infty} = 0$.

(ii) Wegen $a_{3k} = 1 + 1/2^{3k} \to 1$, $a_{3k-1} = 2 \to 2$ und $a_{3k-2} = 2 + 1 + 1/(3k-2) \to 3$ für $k \to \infty$ ergeben sich hier die drei Häufungspunkte 1, 2 und 3. Weitere Häufungspunkte gibt es nicht. Damit gilt $\liminf\limits_{n\to\infty} = 1$ und $\limsup\limits_{n\to\infty} = 3$.

Aufgabe 2: Angenommen, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$. Induktiv sieht man ein: $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$: IA: Es ist $a_1 = 1 > 0$.
IS: Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gelte $a_n > 0$ (IV). Es ist
$$a_{n+1} = \frac{2+4a_n}{4+3a_n} > 0.$$
Nach Satz 6.3 (3) gilt also $a \geq 0$. Ferner gilt:
$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+4a_n}{4+3a_n} = \frac{2+4a}{4+3a}$$
Auflösen nach a liefert:
$$4a + 3a^2 = 2 + 4a \Leftrightarrow a^2 = \frac{2}{3} \overset{a\geq 0}{\Leftrightarrow} a = \sqrt{\frac{2}{3}}$$
Also ist $a = \sqrt{\frac{2}{3}}$ der einzige Kandidat für den Grenzwert. Wegen $a_1 = 1 > a$, liegt die Vermutung, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist, nahe. Wir zeigen mittels vollständiger Induktion, dass $a_{n+1} - a_n \leq 0$.
IA: Es ist $a_2 - a_1 = \frac{2+4a_1}{4+3a_1} - a_1 = \frac{6}{7} - 1 = -\frac{1}{7} < 0$.
IS: Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gelte $a_{n+1} - a_n \leq 0$ (IV). Dann folgt
$$a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{2+4a_{n+1}}{4+3a_{n+1}} - \frac{2+4a_n}{4+3a_n} = \frac{10(a_{n+1}-a_n)}{(4+3a_{n+1})(4+3a_n)} \overset{(IV)}{\leq} 0.$$
D.h. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend und nach der obigen Behauptung nach unten beschränkt. Nach Satz in 6.4. der Vorlesung ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Wie anfangs bereits festgestellt wurde, ist der Grenzwert $a = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Aufgabe 3:

(a) Diese Folge ist konvergent, denn es gilt

$$\frac{n^2-5n-9}{1+2n^2+3n^3} = \frac{n^3\left(\frac{1}{n}-5\cdot\frac{1}{n^2}-9\cdot\frac{1}{n^3}\right)}{n^3\left(\frac{1}{n^3}+2\cdot\frac{1}{n}+3\right)} = \frac{0+0-0}{0+0+3} = 0.$$

(b) Wegen $a_{2k} = 1+\frac{1}{2k} \to 1$ $(k\to\infty)$ und $a_{2k+1} = -1+\frac{1}{2k+1} \to -1$ $(k\to\infty)$ besitzt die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die zwei verschiedenen Häufungspunkte 1 und -1. Daher ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

(c) Für jedes $n\in\mathbb{N}$ gilt

$$3 = \sqrt[n]{3^n} \le a_n \le \sqrt[n]{3^n+3^n} = \sqrt[n]{2\cdot 3^n} = 3\cdot\sqrt[n]{2}.$$

Wegen $\sqrt[n]{2}\to 1$ $(n\to\infty)$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$.

Bemerkung: Analog lässt sich für alle $a,b\ge 0$ zeigen: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n} = \max\{a,b\}$.

(d) Sei $n\in\mathbb{N}$, es gilt:

$$\begin{aligned} a_n &= n-n\left(1-\frac{1}{n}\right)^5 = n\left(1-\left(1-\frac{5}{n}+\frac{10}{n^2}-\frac{10}{n^3}+\frac{5}{n^4}-\frac{1}{n^5}\right)\right) \\ &= 5-\frac{10}{n}+\frac{10}{n^2}-\frac{5}{n^3}+\frac{1}{n^4} \end{aligned}$$

Folglich ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 5$.

(e) Sei $a>0$. Für jedes $n\in\mathbb{N}$ erhalten wir

$$a_n = \frac{a^n-a^{-n}}{a^n+a^{-n}} = \frac{1-a^{-2n}}{1+a^{-2n}} = \frac{a^{2n}-1}{a^{2n}+1}.$$

1. Fall: $a\in(0,1)$. Aufgrund von $a^2\in(0,1)$ ist $a^{2n}=(a^2)^n\to 0$ $(n\to\infty)$, woraus

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{a^{2n}-1}{a^{2n}+1} = \frac{0-1}{0+1} = -1$$

folgt.

2. Fall: $a=1$. Hier ergibt sich $a_n=0$ für alle $n\in\mathbb{N}$, so dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ist.

3. Fall: $a\in(1,\infty)$. Wegen $a^2>1$ ist $0<\frac{1}{a^2}<1$. Daher gilt $a^{-2n} = (\frac{1}{a^2})^n \to 0$ $(n\to\infty)$ und

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1-a^{-2n}}{1+a^{-2n}} = \frac{1-0}{1+0} = 1.$$

(f) Es gilt für alle $n\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \sqrt{9n^2+2n+1}-3n &= \left(\sqrt{9n^2+2n+1}-3n\right)\cdot\frac{\sqrt{9n^2+2n+1}+3n}{\sqrt{9n^2+2n+1}+3n} \\ &= \frac{9n^2+2n+1-9n^2}{\sqrt{9n^2+2n+1}+3n} = \frac{2n+1}{\sqrt{9n^2+2n+1}+3n} \\ &= \frac{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{9+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}+3\right)} = \frac{2+\frac{1}{n}}{\sqrt{9+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}+3} \end{aligned}$$

Mit dieser Darstellung folgt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{3}$.

(g) Wir verwenden

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \qquad (a, b \in \mathbb{R}). \tag{$*$}$$

Sind $a = \sqrt[3]{n^6 + 6n}$ und $b = \sqrt[3]{n^6 + 6}$, so gilt

$$\begin{aligned}
a_n &\overset{(*)}{=} n^3 \cdot \frac{(n^6 + 6n) - (n^6 + 6)}{(n^6 + 6n)^{2/3} + (n^6 + 6n)^{1/3}(n^6 + 6)^{1/3} + (n^6 + 6)^{2/3}} \\
&= n^3 \cdot \frac{6n - 6}{\left(n^6\left(1 + \frac{6}{n^5}\right)\right)^{2/3} + \left(n^6\left(1 + \frac{6}{n^5}\right)\right)^{1/3}\left(n^6\left(1 + \frac{6}{n^6}\right)\right)^{1/3} + \left(n^6\left(\left(1 + \frac{6}{n^6}\right)\right)^{2/3}} \\
&= \frac{6n^4 - 6n^3}{n^4\left(1 + \frac{6}{n^5}\right)^{2/3} + n^2\left(1 + \frac{6}{n^5}\right)^{1/3} n^2\left(1 + \frac{6}{n^6}\right)^{1/3} + n^4\left(1 + \frac{6}{n^6}\right)^{2/3}} \\
&= \frac{6 - \frac{6}{n}}{\left(1 + \frac{6}{n^5}\right)^{2/3} + \left(1 + \frac{6}{n^5}\right)^{1/3}\left(1 + \frac{6}{n^6}\right)^{1/3} + \left(1 + \frac{6}{n^6}\right)^{2/3}} \\
&\xrightarrow{n\to\infty} \frac{6 - 0}{1^{2/3} + 1^{1/3} \cdot 1^{1/3} + 1^{2/3}} = 2.
\end{aligned}$$

Damit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert 2.