Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Silvana Avramska-Lukarska

WS 2015/16
18.11.2015

Höhere Mathematik I

für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 5. Übungsblatt

Aufgabe 1:

(i) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k+1-1}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right) = \frac{1}{0!} - \frac{1}{(n+1)!} \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

Folglich konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!}$ und hat den Wert 1.

(ii) Nach dem binomischen Satz gilt für jedes $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{m+k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{m} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \cdot 1^{m-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{m} \left(1 + \frac{1}{2}\right)^{m} = \left(\frac{3}{4}\right)^{m}.$$

Wir haben also eine geometrische Reihe vor uns; wegen $\left|\frac{3}{4}\right| < 1$ ist sie konvergent und hat den Wert

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n} = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} = 4.$$

Aufgabe 2:

(i) Die Bernoullische Ungleichung liefert $2^n = (1+1)^n \geq 1 + n \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d. h. es ist stets $\sqrt[n]{n} \leq 2$. Somit ergibt sich für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left| \frac{\sqrt[n]{n}}{n!} \right| \leq \frac{2}{n!} =: b_n.$$

Bekanntlich konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ (mit Reihenwert e), also ist auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent, und die absolute Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n!}$ folgt mit dem Majorantenkriterium.

(ii) Es gilt

$$\sqrt{1+n^2} - n = \frac{1 + n^2 - n^2}{\sqrt{1+n^2} + n} = \frac{1}{\sqrt{1+n^2} + n} \geq \frac{1}{\sqrt{4n^2} + n} = \frac{1}{3n} =: c_n \geq 0,$$

und da die Reihe über c_n divergiert, gilt dies nach dem Minorantenkriterium auch für die zu untersuchende Reihe.

(iii) Für $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir $a_n := \frac{(-1)^n}{3n+(-1)^n} = (-1)^n b_n$ mit $b_n := \frac{1}{3n+(-1)^n}$. Die Folge (b_n) konvergiert gegen 0. Ferner ist (b_n) monoton fallend, denn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3(n+1) + (-1)^{n+1}}{3n + (-1)^n} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3 \geq (-1)^n - (-1)^{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad 3 \geq 2(-1)^n$$

und die letzte Ungleichung ist offenkundig wahr. Nach dem Leibnizkriterium konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$. Wegen

$$|a_n| = \frac{1}{3n+(-1)^n} \geq \frac{1}{3n+n} = \frac{1}{4n}$$

und der Divergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n}$ eine divergente Minorante für $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$. Deshalb ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ nicht absolut konvergent.

(iv) Ist $a_n := \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ gesetzt, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} b_n = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right| &= \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \\ &= \frac{(1+1/n)^2}{(2+2/n)(2+1/n)} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{(1+0)^2}{(2+0)(2+0)} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Wegen $\limsup\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{4}$ folgt mit dem Quotientenkriterium, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ absolut konvergent ist.

(v) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$b_n := \sqrt[n]{\left|\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}\right|} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^n \leq \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Folglich ist

$$\limsup_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{3} < 1$$

und $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}$ nach dem Wurzelkriterium absolut konvergent.

Aufgabe 3:

(a) Offenbar ist $a_1 = 2 > 0$. Für jedes $n > 1$ gilt wegen $n > \sqrt{n}$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} > \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0.$$

Die Konvergenz von (a_n) gegen 0 ist klar wegen $\frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ und $\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

(b) Für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$s_N := \sum_{n=1}^{N}(-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{-1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}.$$

Die erste Summe ist die N-te Partialsumme der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, die nach dem Leibnizkriterium konvergiert, weil $\frac{1}{\sqrt{n}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist; insbesondere ist die Folge ihrer Partialsummen $\big(\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\big)_{N\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt, d. h. es gibt eine Konstante C mit $\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \leq C$ für alle $N \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$s_N \leq C - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} \qquad \text{für jedes } N \in \mathbb{N}.$$

Aufgrund von $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \to \infty$ für $N \to \infty$ folgt $s_N \xrightarrow{N\to\infty} -\infty$, d.h. die gegebene Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ ist tatsächlich divergent.

(c) Das Leibnizkriterium ist nicht anwendbar, weil die Folge (a_n) nicht monoton ist.

Aufgabe 4: Die Reihe

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

konvergiert nach dem Leibnizkriterium, weil $\frac{1}{\sqrt{n}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist. Es gilt

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} \right). \quad (*)$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} \geq \frac{1}{\sqrt{4n}} + \frac{1}{\sqrt{4n}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Wegen $n > \sqrt{n} \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$, ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ eine divergente Minorante für die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Folglich ist $(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ eine divergente Minorante für die Reihe in $(*)$.