

Höhere Mathematik I

für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

6. Übungsblatt

Aufgabe 1: Für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definiere $a_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, dass aber das Cauchyprodukt der Reihe mit sich selbst divergiert.

Hinweis: Zeigen Sie, dass die Reihenglieder des Cauchyprodukts keine Nullfolge bilden.

Aufgabe 2:

(a) Welche Funktionen von \mathbb{C} nach \mathbb{C} werden durch die folgenden Potenzreihen dargestellt?

$$(i) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{(n+1)!} z^n$$

$$(ii) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (z+1)^{2n+2}$$

(b) Bestimmen Sie jeweils eine Potenzreihenentwicklung der Funktion f um die angegebene Entwicklungsstelle z_0 . Wie groß ist dabei der Konvergenzradius?

(i) $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \sin z, \quad z_0 = 1$

(ii) $f: \mathbb{C} \setminus \{-1, \frac{1}{2}\} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1-z}{1-z-2z^2}, \quad z_0 = 0$

Hinweis: In Teil (ii) hilft die Gleichung $\frac{1-z}{1-z-2z^2} = \frac{\frac{2}{3}}{1+z} + \frac{\frac{1}{3}}{1-2z}$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, \frac{1}{2}\}$ weiter.

Aufgabe 3: Für welche $z \in \mathbb{C}$ bzw. $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die folgenden Potenzreihen?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} (z-2i)^n$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{n(1+(-1)^n)} z^{2n}$

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2} x^n$

Die Aufgaben werden in der Übung am 27.11.2015 besprochen.