Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Silvana Avramska-Lukarska

WS 2015/16
25.11.2015

Höhere Mathematik I

für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 6. Übungsblatt

Aufgabe 1: Zu $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definiere $a_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ sowie $b_n := \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n$ konvergiert nach dem Leibnizkriterium, weil (b_n) eine monoton fallende Nullfolge ist (Nachweis der Monotonie: $1 < \Rightarrow\ n+1 < n+2\ \Rightarrow\ \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1}\ \Rightarrow\ b_{n+1} < b_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$).

Für das Cauchyprodukt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ mit sich selbst gilt

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}a_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} \cdot \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n-k+1} \cdot \sqrt{k+1}}.$$

Mit

$$0 \le (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a - 2\sqrt{a}\,\sqrt{b} + b \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{a}\,\sqrt{b} \le \tfrac{1}{2}(a+b) \qquad (\text{für } a, b > 0)$$

folgt

$$\begin{aligned} |c_n| &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n-k+1} \cdot \sqrt{k+1}} \ge \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\frac{1}{2}(n-k+1+k+1)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{n+2} \\ &= \frac{2}{n+2} \sum_{k=0}^{n} 1 = \frac{2(n+1)}{n+2} = \frac{2+2/n}{1+2/n} \to 2 \quad (n \to \infty). \end{aligned}$$

Demnach ist (c_n) keine Nullfolge und damit $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ divergent.

Bemerkung: In dieser Aufgabe wurde ein Beispiel gegeben, dass das Cauchyprodukt zweier konvergenter Reihen nicht konvergieren muss, wenn beide Reihen nicht absolut konvergieren.

Aufgabe 2:

(a) (i) Die Potenzreihe lässt sich als Differenz zweier Potenzreihen darstellen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{(n+1)!}\, z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1-2}{(n+1)!}\, z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n+1)!}\, z^n\,.$$

Die erste Reihe ergibt e^z, die zweite liefert für $z = 0$ den Wert 2 und für $z \neq 0$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n+1)!}\, z^n = \frac{2}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}\, z^{n+1} = \frac{2}{z} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \frac{2}{z}(e^z - 1)\,.$$

Insgesamt folgt: Die von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{(n+1)!}\, z^n$ dargestellte Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist gegeben durch

$$f(0) = e^0 - 2 = -1\,, \qquad f(z) = e^z - \frac{2e^z - 2}{z} = \frac{(z-2)e^z + 2}{z} \quad (z \neq 0)\,.$$

(ii) Hier ergibt sich gemäß der Reihendarstellung der Sinus-Funktion fr jedes $z \in \mathbb{C}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z+1)^{2n+2} = (z+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z+1)^{2n+1} = (z+1)\sin(z+1)\,.$$

(b) (i) Wir kennen die Potenzreihen für $\sin z$ und $\cos z$ um die Entwicklungsstelle 0. In Verbindung mit dem Additionstheorem für $\sin z$ ergibt sich für jedes $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} f(z) &= \sin(1+(z-1)) = \sin(1)\cos(z-1) + \cos(1)\sin(z-1) \\ &= \sin(1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}(z-1)^{2k} + \cos(1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(z-1)^{2k+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-1)^n \end{aligned}$$

mit

$$a_n := \begin{cases} \sin(1)\,\frac{(-1)^{n/2}}{n!}, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \cos(1)\,\frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n!}, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Der Konvergenzradius der Reihe ist offensichtlich ∞.

(ii) Für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, \frac{1}{2}\}$ erhalten wir unter Verwendung des Hinweises

$$f(z) = \frac{1-z}{1-z-2z^2} = \frac{2/3}{1+z} + \frac{1/3}{1-2z} = \frac{2}{3}\frac{1}{1-(-z)} + \frac{1}{3}\frac{1}{1-(2z)}\,.$$

Für $|z| < 1$ gilt

$$\frac{2}{3}\frac{1}{1-(-z)} = \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n$$

und für $|2z| < 1$ ist

$$\frac{1}{3}\frac{1}{1-(2z)} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(2z)^n\,.$$

Hiermit folgt für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \min\{1, \frac{1}{2}\} = \frac{1}{2}$

$$f(z) = \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(2z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

mit $a_n := \frac{2}{3}\cdot(-1)^n + \frac{1}{3}\cdot 2^n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = 2$ (man betrachtet $b_n = \frac{1}{4}\cdot 2^n, c_n = \frac{1}{2}\cdot 2^n$ und zeigt, dass $b_n \le a_n \le c_n$ für $n \ge 4$; da $\sqrt[n]{b_n} \to 2$ und $\sqrt[n]{c_n} \to 2$, folgt mit Satz 6.3 (4) $\sqrt[n]{a_n} \to 2$) beträgt der Konvergenzradius der Potenzreihe $2^{-1} = \frac{1}{2}$.

Bemerkung: Die Darstellung $\frac{1-z}{1-z-2z^2} = \frac{2/3}{1+z} + \frac{1/3}{1-2z}$ kann man auf die folgende Weise erhalten ($\to$ Partialbruchzerlegung): Wegen $1-z-2z^2 = (1+z)(1-2z)$ machen wir den Ansatz

$$\frac{1-z}{1-z-2z^2} = \frac{a}{1+z} + \frac{b}{1-2z}$$

und müssen die Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ berechnen. Die rechte Seite dieser Gleichung liefert

$$\frac{a}{1+z} + \frac{b}{1-2z} = \frac{a(1-2z)+b(1+z)}{(1+z)(1-2z)} = \frac{a+b+(-2a+b)z}{1-z-2z^2}\,.$$

Die Darstellung gelingt also, wenn $a+b=1$ und $-2a+b=-1$ sind. Dies bedeutet $a = \frac{2}{3}$ und $b = \frac{1}{3}$.

Aufgabe 3:

(a) Die Reihe hat die Form $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ mit $z_0 = 2\mathrm{i}$ und $a_n = \frac{1}{n^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Der Konvergenzradius R bestimmt sich nach der Formel von Cauchy-Hadamard zu:

$$R^{-1} = \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

Folglich ist die Potenzreihe für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent.

(b) Die Reihe hat die Form $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ mit

$$a_k = \begin{cases} e^{\frac{k}{2}(1+(-1)^{\frac{k}{2}})}, & \text{für } k = 2n, \\ 0, & \text{für } k = 2n+1. \end{cases}$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned} \sqrt[k]{a_k} &= \begin{cases} \sqrt[k]{e^{\frac{k}{2}(1+(-1)^{\frac{k}{2}})}}, & \text{für } k = 2n \\ \sqrt[k]{0}, & \text{für } k = 2n+1, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sqrt[k]{e^{\frac{k}{2}(1+1)}} = \sqrt[k]{e^k} = e, & \text{für } k = 2n \text{ mit } n \text{ gerade}, \\ \sqrt[k]{e^{\frac{k}{2}(1-1)}} = \sqrt[k]{e^0} = 1, & \text{für } k = 2n \text{ mit } n \text{ ungerade}, \\ 0, & \text{für } k = 2n+1, \end{cases} \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = e.$$

Nach der Formel von Cauchy-Hadamard ist somit $R = e^{-1}$ der Konvergenzradius von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.

Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = e^{-1}$ gilt

$$\left|a_{4m} z^{4m}\right| = e^{2m(1+(-1)^{2m})} \, |z|^{4m} = e^{4m} e^{-4m} = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Somit ist in diesem Fall $(a_k z^k)_{k\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge und die Reihe $\sum\limits_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ divergent.

(c) Sei $a_n := \frac{2n+1}{(n-1)^2}$ für alle $n \geq 2$. Offenbar gilt $a_n > 0$ für alle $n \geq 2$. Wir können daher versuchen, den Konvergenzradius R der Potenzreihe $\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$ mit Hilfe des Satzes 7.15 (Folgerung aus dem Quotientenkriterium) zu bestimmen. Es gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2(n+1)+1}{(n+1-1)^2} \cdot \frac{(n-1)^2}{2n+1} = \frac{2n+3}{2n+1} \cdot \frac{(n-1)^2}{n^2}$$

für alle $n \geq 2$ und folglich $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$. Folglich ist $R = \frac{1}{1} = 1$.

Für $x = 1$ gilt

$$a_n x^n = \frac{2n+1}{(n-1)^2} \geq \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}$$

für alle $n \geq 2$. Folglich ist die Reihe $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n x^n$ divergent nach dem Minorantenkriterium.

Wegen

$$a_n = \frac{2n+1}{(n-1)^2} = \frac{2(n-1)+3}{(n-1)^2} = \frac{2}{n-1} + \frac{3}{(n-1)^2} \geq \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} = \frac{2(n+1)+1}{n^2} = a_{n+1}$$

für alle $n \geq 2$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2} = 0$ ist die Reihe $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n x^n$ konvergent für $x = -1$ nach dem Leibnizkriterium.