Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Silvana Avramska-Lukarska

WS 2015/16
3.12.2015

Höhere Mathematik I

für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 7. Übungsblatt

Aufgabe 1: Per Definition: Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$, falls U bzgl der Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist.
Sats: Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^3$ ist Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ genau dann, wenn

(i) $U \neq \emptyset$

(ii) für alle $(x_1, y_1, z_1)^T, (x_2, y_2, z_2)^T \in\in U, \alpha \in \mathbb{K}$ gilt $(x_1, y_1, z_1)^T + (x_2, y_2, z_2)^T \in U$ und $\alpha(x_1, y_1, z_1)^T \in U$.

(a) (i) Sei $(x, y, z)^T = (1, 1, -5)$. Dann ist $(x, y, z)^T \in A$, denn $2x+3y+z = 2\cdot 1+3\cdot 1-5 = 0$.

(ii) Seien $(x_1, y_1, z_1)^T, (x_2, y_2, z_2)^T \in A$. Es gilt $(x_1, y_1, z_1)^T+(x_2, y_2, z_2)^T = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)^T$ und $2(x_1+x_2)+3(y_1+y_2)-(z_1+z_2) = \underbrace{2x_1 + 3y_1 - z_1}_{=0} + \underbrace{2x_2 + 3y_2 - z_2}_{=0} = 0$, d.h. $(x_1, y_1, z_1)^T + (x_2, y_2, z_2)^T \in A$.
Seien jetzt $(x_1, y_1, z_1)^T$ und $\alpha \in \mathbb{K}$. Dann gilt $\alpha(x_1, y_1, z_1)^T = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)^T$ und $3(\alpha x_1) + 2(\alpha y_1) - \alpha z_1 = \alpha(\underbrace{2x_1 + 3y_1 - z_1}_{=0}) = 0$, d.h. $\alpha(x_1, y_1, z_1)^T \in A$.
Folglich ist A ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.

(b) B ist kein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$, weil $(0, 0, 0)^T \notin B$.

(c) Da $(0, 0, 0)^T \notin B$ folgt $(0, 0, 0)^T \notin A \cap B = C$. Daher ist C kein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.

(d) (i) Sei $(x, y, z)^T = (1, 1, -5)$. Dann ist $(x, y, z)^T \in C$, denn $x^2 = 1 = y^2$.

(ii) Seien $(x_1, y_1, z_1)^T = (1, 1, 0)^T, (x_2, y_2, z_2)^T = (1, -1, 0)^T$. Es gilt $(x_1, y_1, z_1)^T, (x_2, y_2, z_2)^T \in D$, aber $(x_1, y_1, z_1)^T + (x_2, y_2, z_2)^T = (2, 0, 0)^T \notin D$.
Folglich ist A ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 2:

(a) Die Funktion $x \mapsto \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ ist als Komposition stetiger Funktionen überall dort stetig, wo sie definiert ist, d.h. außerhalb der Nullstellenmenge des Nenners. Wegen $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$ verschwindet der Nenner für $x = 1$ oder $x = 3$. Daher ist $x \mapsto \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$ stetig, so dass auch f auf $\mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$ stetig ist. Nun gilt $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} = f(1)$, also ist f auch in der Stelle 1 stetig. Da 3 eine Nullstelle des Nenners und keine Nullstelle des Zählers von $\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ ist, existiert $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ nicht (da $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3-} = \infty \neq -\infty \lim\limits_{x\to 3^-} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$). Also ist f in 3 unstetig (unabhängig davon, was der Funktionswert $f(3)$ tatsächlich ist).

(b) (i) Da f für alle $x \in D \setminus \{1\}$ stetig ist, reicht es $f(1) = y_0$ so zu wählen, dass $\lim_{x\to 1} f(x) = y_0$ gilt. Für alle $x \in D \setminus \{1\}$ gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x^2-4)(x-1)} = \frac{1}{x-1} \cdot \left(1 + \frac{3}{(x^2-4)}\right) = \frac{1}{x-1} \cdot \frac{(x^2-4)+3}{(x^2-4)} \\ &= \frac{1}{x-1} \cdot \frac{x^2-1}{(x^2-4)} = \frac{1}{x-1} \cdot \frac{(x-1)(x+1)}{(x^2-4)} = \frac{x+1}{(x^2-4)}. \end{aligned}$$

Folglich muss $y_0 := \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{(x^2-4)} = -\frac{2}{3}$ gewählt werden.

(ii) Da f für alle $x \in D\setminus\{0\}$ stetig ist, reicht es $f(0) = y_0$ so zu wählen, dass $\lim_{x\to 0} f(x) = y_0$ gilt. Für alle $x \in D \setminus \{0\}$ gilt:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x\sin(x)}{\cos(x)-1} = \frac{x\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}-1} = \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+2}}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}} \\
&\overset{\text{Index-Shift}}{=} \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+2}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!}x^{2n+2}} = -\frac{x^2\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}}{x^2\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+2)!}x^{2n}} = -\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+2)!}x^{2n}}
\end{aligned}$$

Da die Potenzreihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+2)!}x^{2n}$ den gemeinsamen Konvergenzradius $R=\infty$ haben, definieren sie die Funktionen $f_1 : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ und $f_2 : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n} \qquad \text{und} \qquad f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+2)!}x^{2n}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach Satz 8.7 (Stetigkeit von Potenzreihen), sind f_1 und f_2 stetig. Folglich muss

$$y_0 := \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{-f_1(x)}{f_2(x)} = -\frac{f_1(0)}{f_2(0)} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$$

gewählt werden.

Aufgabe 3:

(a) Der Nenner hat in $x=2$ keine Nullstelle, daher gilt

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+7x+2}{x^3-x^2+3x} = \frac{2^2+7\cdot 2+2}{2^3-2^2+3\cdot 2} = \frac{20}{10} = 2\,.$$

(b) Für $x \neq 1$ gilt wegen $1-x^3 = (1-x)(1+x+x^2)$

$$\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} = \frac{(1+x+x^2)-3}{1-x^3} = \frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)} = -\frac{x+2}{1+x+x^2}.$$

Damit ergibt sich für den Grenzwert

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right) = \lim_{x\to 1} -\frac{x+2}{1+x+x^2} = -\frac{1+2}{1+1+1^2} = -\frac{3}{3} = -1.$$

(c) Dieser Grenzwert existiert nicht. Der Zähler des Bruchs hat in $x=3$ nämlich keine Nullstelle, und wegen $(x^2-x)/(x+2) \to 6/5$ für $x\to 3$ gilt

$$\frac{x^2-x}{x^2-x-6} = \frac{1}{x-3}\cdot\frac{x^2-x}{x+2} \longrightarrow \begin{cases} +\infty & \text{für } x\to 3^+\,,\\ -\infty & \text{für } x\to 3^-\,.\end{cases}$$