Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Silvana Avramska-Lukarska

WS 2015/16
8.12.2015

Höhere Mathematik I

für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

8. Übungsblatt

Aufgabe 1: Die Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} & \text{für } 0 < |x| \le 1, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f stetig ist.

(b) Bestimmen Sie den Wertebereich $f([-1,1])$ von f.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $|f(x)| \le 1$ für alle $x \in [-1,1]$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass f eine Umkehrfunktion besitzt. Berechnen Sie f^{-1}.

(d) Begründen Sie, dass f^{-1} streng monoton wachsend ist.

(e) Ist f streng monoton wachsend? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2: Berechnen Sie die in der folgenden Tabelle

φ	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
$\cos(\varphi)$	1		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		0				-1
$\sin(\varphi)$	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1				0
$\tan(\varphi)$	0		1		n.d.[1]				0

fehlenden Werte für

(a) $\varphi = \frac{3}{4}\pi$, (b) $\varphi \in \left\{\frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi\right\}$, (c) $\varphi \in \left\{\frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi\right\}$.

Aufgabe 3:

(a) Berechnen Sie alle $x \in (0,\infty)$, die $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x}\,)^x$ erfüllen.

(b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die gilt
 (i) $2^{x-1} + 3^{x+1} = 2^{x+4} + 3^{x-1}$; (ii) $x^{\log_{10} x} = 100\,x$.

(c) Beweisen Sie:
$$\log_2\big(\sqrt{7} - \sqrt{3}\,\big) = 2 - \log_2\big(\sqrt{7} + \sqrt{3}\,\big)\,.$$

Aufgabe 4: Zeigen Sie die Identitäten

(a) $\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x, y, x+y \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$;

(b) $\arctan x + \arctan y = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|\arctan x + \arctan y| < \frac{\pi}{2}$;

(c) $(\cosh x + \sinh x)^n = \cosh(nx) + \sinh(nx)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$;

(d) $\operatorname{Arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ für alle $x \in \mathbb{R}$;

(e) $\operatorname{Artanh} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ für alle $x \in (-1,1)$.

Die Aufgaben werden in der Übung am 11.12.2015 besprochen.

http://www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm1etit2015w/

[1] nicht definiert