Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Silvana Avramska-Lukarska

WS 2015/16
8.12.2015

Höhere Mathematik I

für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 8. Übungsblatt

Aufgabe 1:

(a) Als Komposition stetiger Funktionen ist f auf $[-1,1]\setminus\{0\}$ stetig. Für $x \in [-1,1]\setminus\{0\}$ gilt

$$f(x) = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\cdot\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-(1-x^2)}{x(1+\sqrt{1-x^2})} = \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\,. \tag{1}$$

Demnach gilt $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$, und damit ist f auch stetig in 0.

(b) Wir zeigen zunächst $|f(x)| \le 1$ für alle $x \in [-1,1]$: Für jedes $x \in [-1,1]\setminus\{0\}$ gilt

$$|f(x)| \overset{(1)}{=} \frac{|x|}{1+\underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\ge 0}} \le |x| \le 1.$$

Wegen $f(0) = 0$ ist $|f(x)| \le 1$ für alle $x \in [-1,1]$ bewiesen. Hieraus folgt $f([-1,1]) \subset [-1,1]$.

Nun zeigen wir $[-1,1] \subset f([-1,1])$. Sei dazu $y_0 \in [-1,1]$. Wegen $-1 = f(-1)$ und $1 = f(1)$ ist $y_0 \in [f(-1), f(1)]$. Aufgrund der Stetigkeit von f existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $x_0 \in [-1,1]$ mit $y_0 = f(x_0) \in \{f(x) \mid x \in [-1,1]\} = f([-1,1])$. Da $y_0 \in [-1,1]$ beliebig war, folgt $[-1,1] \subset f([-1,1])$. Insgesamt ergibt sich $f([-1,1]) = [-1,1]$.

(c) Um die Existenz der Umkehrfunktion von f nachzuweisen, verwenden wir folgendes Resultat: Seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Funktion. Gelingt es, die Gleichung $y = f(x)$ durch Äquivalenzumformungen in die Form $x = g(y)$ zu bringen (wobei $x \in X$, $y \in Y$ und $g : Y \to X$), dann ist f bijektiv und die Umkehrfunktion von f lautet g.
Für $x \in [-1,1]\setminus\{0\}$ gilt

$$\begin{aligned}
y = f(x) \quad &\iff \quad y = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \quad &&\iff \quad 1 - xy = \sqrt{1-x^2}\\
&\overset{1-xy\ge 0}{\iff} \quad 1 - 2xy + x^2y^2 = 1 - x^2 \quad &&\iff \quad x^2(1+y^2) = 2xy\\
&\overset{x\ne 0}{\iff} \quad x(1+y^2) = 2y \quad &&\iff \quad x = \frac{2y}{1+y^2}\,.
\end{aligned}$$

Für $x = 0$ gilt $y = f(0) = 0$, also gilt auch hier $x = \frac{2y}{1+y^2}$. Die Rechnung zeigt: f besitzt eine Umkehrfunktion, die durch

$$f^{-1} : \underbrace{[-1,1]}_{=f([-1,1])} \to [-1,1],\ y \mapsto \frac{2y}{1+y^2}$$

gegeben ist.

(d) Seien $x_1, x_2 \in [-1,1]$ mit $x_1 < x_2$. Zu zeigen ist $f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2)$. Dies ergibt sich aus

$$\begin{aligned}
f^{-1}(x_2) - f^{-1}(x_1) &= \frac{2x_2}{1+x_2^2} - \frac{2x_1}{1+x_1^2} = \frac{2x_2(1+x_1^2) - 2x_1(1+x_2^2)}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)} = \frac{2(x_2 - x_1 + x_1^2x_2 - x_1x_2^2)}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)}\\
&= \frac{2(x_2 - x_1 + x_1x_2(x_1-x_2))}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)} = \frac{2(x_2-x_1)(1-x_1x_2)}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)} > 0,
\end{aligned}$$

denn wegen $-1 \le x_1 < x_2 \le 1$ ist $x_1x_2 < 1$.

(e) Da f^{-1} die Umkehrfunktion von f ist, ist f die Umkehrfunktion von f^{-1}. Da f^{-1} streng monoton wachsend ist, ist es ihre Umkehrfunktion f nach dem Satz in 9.10 auch.

Aufgabe 2:

(a) Es gilt

$$\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \cos\left(\pi - \frac{1}{4}\pi\right) \overset{10.2\,(2)}{=} -\cos\left(-\frac{1}{4}\pi\right) \overset{10.2\,(12)}{=} -\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

sowie

$$\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \sin\left(\pi - \frac{1}{4}\pi\right) \overset{10.2\,(2)}{=} -\sin\left(-\frac{1}{4}\pi\right) \overset{10.2\,(12)}{=} \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

und somit

$$\tan\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -1.$$

(b) Nach den Additionstheoremen (3) aus Abschnitt 7.12 der Vorlesung gilt für alle $\varphi \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
\sin(3\varphi) &= \sin(2\varphi + \varphi) = \sin(2\varphi)\cos(\varphi) + \cos(2\varphi)\sin(\varphi) \\
&= (\sin(\varphi)\cos(\varphi) + \cos(\varphi)\sin(\varphi))\cos(\varphi) + (\cos(\varphi)\cos(\varphi) - \sin(\varphi)\sin(\varphi))\sin(\varphi) \\
&= 2\sin(\varphi)\cos^2(\varphi) + \sin(\varphi)\left(\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)\right) = \sin(\varphi)\left(3\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)\right)
\end{aligned}$$

Nach Abschnitt 7.12 (2) der Vorlesung gilt $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dadurch lässt sich $\cos^2(\varphi)$ in der obigen Gleichung eliminieren:

$$\sin(3\varphi) = \sin(\varphi)\left(3(1 - \sin^2(\varphi)) - sin^2(\varphi)\right) = \sin(\varphi)\left(3 - 4\sin^2(\varphi)\right)$$

Einsetzen von $\varphi = \frac{1}{3}\pi$ liefert:

$$0 = \sin(\pi) = \sin\left(3 \cdot \frac{1}{3}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)\left(3 - 4\sin^2\left(\frac{1}{3}\pi\right)\right)$$

Nach (9) im Abschnitt 10.2 der Vorlesung gilt $\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) \neq 0$. Folglich ist

$$\left|\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Nach Abschnitt 10.3 der Vorlesung ist $\sin(\varphi) > 0$ für $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2}]$. Also ist $\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Nach dem gleichen Abschnitt ist $\cos(\varphi) > 0$ für $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2})$ und damit

$$\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{1}{3}\pi\right)} = \frac{1}{2}$$

sowie

$$\tan\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)}{\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right)} = \sqrt{3}.$$

Wie in Teilaufgabe (a) folgt

$$\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \cos\left(\pi - \left(\frac{1}{3}\pi\right)\right) = -\cos\left(-\frac{1}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}$$

sowie

$$\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \sin\left(\pi - \left(\frac{1}{3}\pi\right)\right) = -\sin\left(-\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

und

$$\tan\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)}{\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)} = -\sqrt{3}.$$

(c) Die bereits zitierten Additionstheoreme liefern

$$\cos(2\varphi) = \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi) \qquad \forall \varphi \in \mathbb{C}$$

Durch Beziehung $\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1$ für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ lässt sich $\sin^2(\varphi)$ in der obigen Gleichung eliminieren. Dies liefert:

$$\frac{\cos(2\varphi) + 1}{2} = \cos^2(\varphi) \qquad \forall \varphi \in \mathbb{R}$$

Einsetzen von $\varphi = \frac{1}{6}\pi$ und Ausnutzen des bekannten Funktionswertes bei $\varphi = \frac{1}{3}\pi$ liefert:

$$\cos^2\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) + 1}{2} = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Damit folgt

$$\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{1}{6}\pi\right)} = \frac{1}{2}$$

sowie

$$\tan\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right)}{\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right)} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Wie in Teilaufgabe (a) bestimmen sich die restlichen Werte:

$$\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \cos\left(\pi - \left(\frac{1}{6}\pi\right)\right) = -\cos\left(-\frac{1}{6}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \sin\left(\pi - \left(\frac{5}{6}\pi\right)\right) = -\sin\left(-\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2} \qquad \text{sowie}$$

$$\tan\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)}{\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right)} = -\cos\left(-\frac{1}{3}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Aufgabe 3:

(a) Sei $x > 0$. Wir formen die gegebene Gleichung $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x}\,)^x$ äquivalent um

$$x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x}\,)^x \quad\Leftrightarrow\quad (e^{\ln x})^{\sqrt{x}} = (e^{\ln\sqrt{x}})^x \quad\Leftrightarrow\quad e^{(\ln x)\sqrt{x}} = e^{(\frac{1}{2}\ln x)x} \quad\Leftrightarrow\quad e^{(\ln x)\sqrt{x}}\, e^{-(\frac{1}{2}\ln x)x} = 1$$
$$\Leftrightarrow\quad e^{(\sqrt{x}-\frac{1}{2}x)\ln x} = 1 \quad\Leftrightarrow\quad (\sqrt{x} - \tfrac{1}{2}x)\ln x = 0\,.$$

Diese Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn $\ln x = 0$ (also $x = 1$) oder wenn $\sqrt{x} - \frac{1}{2}x = \sqrt{x}\,(1 - \frac{1}{2}\sqrt{x}\,) = 0$ gilt. Letzteres gilt genau für $\sqrt{x} = 2$, also $x = 4$. (Man beachte $x > 0$.) Somit gilt $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x}\,)^x$ genau für $x = 1$ oder $x = 4$.

(b) (i) Für $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned}
2^{x-1} + 3^{x+1} = 2^{x+4} + 3^{x-1} \quad &\Longleftrightarrow\quad 2^{x-1} - 2^{x+4} = 3^{x-1} - 3^{x+1} \\
&\Longleftrightarrow\quad 2^x(\tfrac{1}{2} - 2^4) = 3^x(\tfrac{1}{3} - 3) \\
&\Longleftrightarrow\quad 2^x(-\tfrac{31}{2}) = 3^x(-\tfrac{8}{3}) \\
&\Longleftrightarrow\quad \frac{2^x}{3^x} = \frac{8/3}{31/2} \quad\Longleftrightarrow\quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{16}{93} \\
&\Longleftrightarrow\quad x = \log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{16}{93}\right) = \frac{\ln\frac{16}{93}}{\ln\frac{2}{3}} = \frac{\ln 16 - \ln 93}{\ln 2 - \ln 3}.
\end{aligned}$$

(ii) Die Gleichung $x^{\log_{10} x} = 100\,x$ ist nur für $x \in (0,\infty)$ sinnvoll. Für $x > 0$ gilt

$$\begin{aligned} x^{\log_{10} x} = 100\,x \quad &\Longleftrightarrow \quad \log_{10}(x^{\log_{10} x}) = \log_{10}(100\,x) \\ &\Longleftrightarrow \quad (\log_{10} x)(\log_{10} x) = \log_{10}(100) + \log_{10}(x) \\ &\Longleftrightarrow \quad (\log_{10} x)^2 - \log_{10}(x) - 2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad (\log_{10} x - 2)(\log_{10}(x) + 1) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \log_{10} x = 2 \quad \text{oder} \quad \log_{10}(x) = -1 \\ &\Longleftrightarrow \quad x = 100 \quad \text{oder} \quad x = 10^{-1} = \tfrac{1}{10}. \end{aligned}$$

(c) Die Identität $\log_2(\sqrt{7}-\sqrt{3}) = 2 - \log_2(\sqrt{7}+\sqrt{3})$ folgt sofort aus

$$\log_2(\sqrt{7}-\sqrt{3}) + \log_2(\sqrt{7}+\sqrt{3}) = \log_2\big((\sqrt{7}-\sqrt{3})\cdot(\sqrt{7}+\sqrt{3})\big) = \log_2(7-3) = \log_2(4) = 2.$$

Aufgabe 4:

(a) Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x, y, x+y \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$. Nach den Additionstheoremen (3) aus Abschnitt 7.12 der Vorlesung gilt:

$$\begin{aligned} \tan(x+y) &= \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)} \\ &= \frac{\cos(x)\cos(y)}{\cos(x)\cos(y)} \cdot \frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{\sin(y)}{\cos(y)}}{1 - \frac{\sin(x)}{\cos(y)}\frac{\sin(y)}{\cos(y)}} = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)} \end{aligned}$$

(b) Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|\arctan(x) + \arctan(y)| < \frac{\pi}{2}$. Definiere $X := \arctan(x)$ und $Y := \arctan(y)$. Nach Voraussetzung ist also $X, Y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \subseteq \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)^c$. Nach Teilaufgabe (a) folgt dann:

$$\tan(X+Y) = \frac{\tan(X)+\tan(Y)}{1-\tan(X)\tan(Y)}$$

Nach Abschnitt 10.5 der Vorlesung bildet tan das Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ bijektiv auf $\mathbb{R}$ ab mit der Umkehrfunktion $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Folglich ist $\arctan \circ \tan = \mathrm{id}_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$ und $\tan \circ \arctan = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. Die letzte Identität impliziert:

$$\begin{aligned} X + Y &= \arctan(\tan(X+Y)) = \arctan\left(\frac{\tan(X)+\tan(Y)}{1-\tan(X)\tan(Y)}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{\tan(\arctan(x)) + \tan(\arctan(y))}{1-\tan(\arctan(x))\tan(\arctan(y))}\right) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) \end{aligned}$$

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$. Es gilt nach Definition:

$$\begin{aligned} (\cosh(x) + \sinh(x))^n &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^n = (e^x)^n = e^{xn} \\ &= \left(\frac{e^{xn} + e^{-xn}}{2} + \frac{e^{xn} - e^{-xn}}{2}\right) = \cosh(xn) + \sinh(xn) \end{aligned}$$

(d) Sei $x \in \mathbb{R}$. Nach Abschnitt 10.8 der Vorlesung ist $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv. Also existiert ein eindeutig bestimmtes $X \in \mathbb{R}$ mit $x = \sinh(X)$. Ferner ist nach Abschnitt 9.12 die Exponentialabbildung $E : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ bijektiv mit log als Umkehrfunktion. Es ist also $\log \circ E = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. Es gilt damit:

$$\begin{aligned} \operatorname{Arsinh}(x) &= \operatorname{Arsinh}(\sinh(X)) = X = \ln(e^X) = \ln\left(\frac{e^X - e^{-X}}{2} + \frac{e^X + e^{-X}}{2}\right) \\ &= \ln\left(\sinh(X) + \cosh(X)\right) \end{aligned}$$

Mit der Identität $\cosh^2(X) - \sinh^2(X) = 1$ sowie der Tatsache $\cosh(x) \geq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ aus Abschnitt 10.7 der Vorlesung, folgt weiter:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Arsinh}(x) &= \ln\left(\sinh(X) + \cosh(X)\right) = \ln\left(\sinh(X) + \sqrt{\cosh^2(X)}\right) \\
&= \ln\left(\sinh(X) + \sqrt{1 + \sinh^2(X)}\right) = \ln\left(1 + \sqrt{1 + x^2}\right)
\end{aligned}$$

(e) Sei $x \in (-1, 1)$. Nach Abschnitt 10.8 der Vorlesung ist $\tanh : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ bijektiv mit Artanh als Umkehrfunktion. Sei also $X := \operatorname{Artanh}(x)$ bzw. $\tanh(X) = x$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\tanh(X)}{1-\tanh(X)}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{\sinh(X)}{\cosh(X)}}{1-\frac{\sinh(X)}{\cosh(X)}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\cosh(X)+\sinh(X)}{\cosh(X)-\sinh(X)}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\frac{e^X+e^{-X}}{2}+\frac{e^X-e^{-X}}{2}}{\frac{e^X+e^{-X}}{2}-\frac{e^X-e^{-X}}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^X}{e^{-X}}\right) = \frac{1}{2}\ln(e^{2X}) = X = \operatorname{Artanh}(x)
\end{aligned}$$