Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Silvana Avramska-Lukarska

WS 2015/16
16.12.2015

Höhere Mathematik I

für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 9. Übungsblatt

Aufgabe 1:

(a) Seien $h(x) = 1 - x^2$ und $g(x) = \text{Artanh}(x)$. Mit der Produktregel (vgl. Abschnitt 11.2) folgt

$$\begin{aligned} f'(x) &= (hg)'(x) = \left(h'g + hg'\right)(x) \\ &= -2x \cdot \text{Artanh}(x) + (1-x^2)\frac{1}{1-x^2} = 1 - 2x\,\text{Artanh}(x) \qquad \forall x \in (-1,1). \end{aligned}$$

(b) Seien $h(x) = 2x^2 - x + 4$ und $g(x) = \sqrt{x}$. Mit der Quotientenregel (vlg. Abschnitt 11.2) folgt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{h'g - fg}{g^2}(x) \\ &= \frac{(4x-1)\sqrt{x} - (2x^2 - x + 4)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{x} = \frac{6x^2 - x - 4}{2x\sqrt{x}} \qquad \forall x \in (0,\infty). \end{aligned}$$

(c) Seien $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ und $g(x) = \cosh(x)$. Mit der Kettenregel (vlg. Abschnitt 11.3) folgt

$$\begin{aligned} f'(x) &= (h \circ g)'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{\left(\sqrt{\cosh(x)}\right)^3}\right) \cdot \sinh(x) = -\frac{\sinh(x)}{2\left(\sqrt{\cosh(x)}\right)^3} \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(d) Seien $h(x) = \cos(x), g(x) = 2x, k(x) = e^x$ und $l(x) = \sin(x)$. Mit den bereits zitierten Product- und Kettenregeln gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= ((h\circ g)(k \circ l))' = (h\circ g)' \cdot (k\circ l)(x) + (h \circ g)(x) \cdot (k \circ l)'(x) \\ &= h'(g(x)) \cdot g'(x) \cdot k(l(x)) + h(g(x)) \cdot k'(l(x)) \cdot l'(x) \\ &= -\sin(2x) \cdot 2e^{\sin(x)} + \cos(2x) \cdot e^{\sin(x)} \cdot \cos(x) \\ &= \left(\cos(2x)\cos(x) - 2\sin(2x)\right) e^{\sin(x)} \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2:

(a) Es gilt $f'(x) = 8(e^{2x}+4)^{-2} \cdot 2e^{2x} = 16e^{2x}(e^{2x}+4)^{-2} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also ist f streng monoton wachsend und damit injektiv (Satz in Abschnitt 9.10). Wegen

$$\begin{aligned} 1 - (f(x))^2 &= 1 - (1 - 8(e^{2x}+4)^{-1})^2 = 1 - (1 - 16(e^{2x}+4)^{-1} + 64(e^{2x}+4)^{-2}) \\ &= 16(e^{2x}+4)^{-1} - 64(e^{2x}+4)^{-2} = 16(e^{2x}+4)^{-2}((e^{2x}+4) - 4) \\ &= 16e^{2x}(e^{2x}+4)^{-2} = f'(x) \end{aligned}$$

gilt auch die behauptete Gleichung.

(b) f hat als Bildbereich $(-1,1)$, denn $x \mapsto (e^{2x}+4)^{-1}$ hat als Bildbereich $(0,\frac{1}{4})$. Da stets $f' \neq 0$ gilt, liefert der Satz über die Umkehrfunktion (Abschnitt 11.4), dass $f^{-1} : (-1,1) \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist mit

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \overset{(a)}{=} \frac{1}{1-(f(f^{-1}(y)))^2} = \frac{1}{1-y^2} \qquad \text{für alle } y \in (-1,1).$$

Aufgabe 3: Klar ist: für alle $x > 0$ ist f differenzierbar in x und es gilt $f'(x) = 2x$. Weiter gilt für alle $x < 0$, dass f differenzierbar in x ist und $f'(x) = -1$. Bei $x = 0$ gilt

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{h^2-0}{h} = \lim_{h\to 0+} h = 0$$

sowie

$$\lim_{h\to 0-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{-h-0}{h} = -1,$$

also existiert $f'(0)$ nicht.

Aufgabe 4:

(a) Die Funktionen $f, g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \ln(x^2+3) \qquad \text{und} \qquad g(x) = \ln(x)$$

sind differenzierbar und es gilt $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f_2(x) = \infty$. Ferner ist $g(x)'(x) = \frac{1}{x} \neq 0$ für alle $x > 0$. Folglich gilt nach der Regel von l'Hospital (vgl. Abschnitt 11.11):

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2+3)}{\ln(x)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x^2+3}}{\frac{1}{x}} = 2 \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+3} = 2 \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{3}{x^2}}}_{=1} = 2.\end{aligned}$$

(b) Die Funktionen $f_1, g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = 1 + \cos(\pi x) \qquad \text{und} \qquad g(x) = x^2 - 2x + 1$$

sind differenzierbar und es gilt $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} f(x) = 0$. Ferner ist $f'(x) = -\pi \sin(\pi x)$ und $g'(x) = 2x - 2$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist $g'(x) \neq 0$ für alle $x \neq 1$. Folglich gilt nach der Regel von l'Hospital (vgl. Abschnitt 11.11):

$$\lim_{x\to 1} \frac{1+\cos(\pi x)}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{-\pi \sin(\pi x)}{2x-2}$$

Nun sind die Funktionen $f', g' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar, es gilt $\lim_{x\to 1} f'(x) = \lim_{x\to 1} g'(x) = 0$ sowie $f''(x) = -\pi^2 \cos(\pi x)$ und $g''(x) = 2 \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Folglich kann die Regel von l'Hospital erneut angewandt werden und es folgt:

$$\lim_{x\to 1} \frac{-\pi \sin(\pi x)}{2x-2} = \lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{-\pi^2 \cos(\pi x)}{2} = \frac{\pi^2}{2}.$$

(c) Sei $x \geq 1$. Dann ist sin auf $[\sqrt{x}, \sqrt{x+1}]$ stetig und auf $(\sqrt{x}, \sqrt{x+1})$ differenzierbar. Nach dem Mittelwert der Differentialrechnung (MWS) (vgl. Abschnitt 11.7) existiert dann ein $\xi_x \in (\sqrt{x}, \sqrt{x+1})$ mit

$$\begin{aligned}\sin(\sqrt{x}) - \sin(\sqrt{x+1}) &= -\left(\sin(\sqrt{x+1}) - \sin(\sqrt{x})\right) = -\cos(\xi_x)(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \\ &= -\cos(\xi_x)\left(\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right) = -\cos(\xi_x)\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right)\end{aligned}$$

und folglich

$$\left|\sin(\sqrt{x}) - \sin(\sqrt{x+1})\right| = \underbrace{|-\cos(\xi_x)|}_{\leq 1}\left|\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{2\sqrt{x}} \to 0 \quad \text{für } x \to \infty.$$

Deswegen (ähnlich wie Satz 6.4 (1)) gilt

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin(\sqrt{x}) - \sin(\sqrt{x+1})\right) = 0$$