Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Silvana Avramska-Lukarska

WS 2015/16
22.12.2015

Höhere Mathematik I

für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

10. Übungsblatt

Aufgabe 1:

(a) Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_4(f,0)$ von $f\colon x \mapsto \ln(1+x)$ und zeigen Sie

$$0 \leq \ln(1+x) - T_4(f,0)(x) \leq \tfrac{1}{5}\,x^5 \qquad \text{für alle } x \geq 0.$$

(b) Bestimmen Sie Zahlen a, b und c mit

$$|\ln(2+x) - a - bx| \leq c\,x^2 \qquad \text{für alle } x \in [-1,1].$$

Aufgabe 2:

(a) Berechnen Sie die ersten vier Koeffizienten der Potenzreihe um $x_0 = 0$ für $\dfrac{e^x}{\cos(x)}$.

(b) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch $f(x) := x^2 + 2x - 3$. Bestimmen Sie eine Potenzreihe, die in einer Umgebung von $x_0 = -1$ die Funktion $1/f$ darstellt.

Aufgabe 3:

(a) Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \arctan(x) + \arctan(x^{-1})$$

konstant ist, und bestimmen Sie die Konstante.

(b) Berechnen Sie alle lokalen Extrema der Funktionen

(i) $f : (0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto x\ln^2(x)$; (ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{x}{x^2+4}$.

Aufgabe 4:

(a) Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$ und $f(x_0) > 0$ für ein $x_0 \in [a,b]$. Zeigen Sie:

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0\,.$$

(b) Seien $f,g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in [a,b]$ und $f(x_0) > g(x_0)$ für ein $x_0 \in [a,b]$. Zeigen Sie:

$$\int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Die Aufgaben werden in der Übung am 8.1.2016 besprochen.