Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Silvana Avramska-Lukarska

WS 2015/16
8.1.2016

Höhere Mathematik I

für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 10. Übungsblatt

Aufgabe 1:

(a) Die durch $f(x) := \ln(1+x)$ definierte Funktion $f\colon (-1,\infty) \to \mathbb{R}$ ist beliebig oft differenzierbar. Wegen

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}\,, \qquad f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}\,, \qquad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}\,,$$
$$f^{(4)}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4}\,, \quad f^{(5)}(x) = \frac{24}{(1+x)^5}$$

sind

$$f(0) = 0\,, \qquad f'(0) = 1\,, \qquad f''(0) = -1\,, \qquad f'''(0) = 2\,, \qquad f^{(4)}(0) = -6$$

und für das Taylorpolynom $T_4(f,0)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} T_4(f,0)(x) &= \sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k = 0 + x + \tfrac{1}{2!}\,(-1)x^2 + \tfrac{1}{3!}\,2x^3 + \tfrac{1}{4!}\,(-6)x^4 \\ &= x - \tfrac{1}{2}\,x^2 + \tfrac{1}{3}\,x^3 - \tfrac{1}{4}\,x^4\,. \end{aligned}$$

Sei $x \geq 0$. Um die Abschätzung $0 \leq \ln(1+x) - T_4(f,0)(x) \leq \frac{1}{5}\,x^5$ zu zeigen, verwenden wir den Satz von Taylor. Dieser besagt, dass es ein ξ zwischen 0 und x gibt mit

$$f(x) = T_4(f,0)(x) + \frac{f^{(4+1)}(\xi)}{(4+1)!}\,(x-0)^{4+1}\,,$$

also mit

$$f(x) - T_4(f,0)(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\,x^5\,.$$

Somit reicht es, die Abschätzung $0 \leq \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\,x^5 \leq \frac{1}{5}\,x^5$ einzusehen. Diese ist erfüllt, denn:

$$\begin{aligned} \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\,x^5 &= \frac{1}{5!}\cdot\frac{24}{(1+\xi)^5}\,x^5 \geq 0\,, \\ \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\,x^5 &= \frac{1}{5!}\cdot\frac{24}{(1+\xi)^5}\,x^5 \leq \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(1+0)^5}\,x^5 = \frac{1}{5}\,x^5\,. \end{aligned}$$

(b) Für die durch $f(x) := \ln(2+x)$ gegebene Funktion $f\colon (-2,\infty) \to \mathbb{R}$, die beliebig oft differenzierbar ist, gilt

$$f'(x) = \frac{1}{2+x}\,, \qquad f''(x) = -\frac{1}{(2+x)^2}\,.$$

Also haben wir $f(0) = \ln(2)$ und $f'(0) = \frac{1}{2}$. Nach dem Satz von Taylor gibt es zu jedem $x \in [-1,1]$ ein ξ zwischen 0 und x mit

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2!}\,x^2 = \ln(2) + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2(2+\xi)^2}\,.$$

Daher gilt wegen $\xi \in [-1,1]$

$$\left|f(x) - \ln(2) - \frac{x}{2}\right| = \left|\frac{x^2}{2(2+\xi)^2}\right| \le \frac{x^2}{2(2-1)^2} = \frac{x^2}{2}\,.$$

Wir können somit $a = \ln(2)$ und $b = c = \frac{1}{2}$ wählen.

Aufgabe 2:

(a) Wir müssen die Gleichung $e^x = \cos(x) \cdot (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots)$, also

$$1 + x + \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3 + \cdots = \big(1 - \tfrac{1}{2!}x^2 + - \cdots\big)\big(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots\big)$$

betrachten. Die rechte Seite ergibt

$$a_0 + a_1 x + (a_2 - \tfrac{1}{2!}a_0)x^2 + (a_3 - \tfrac{1}{2!}a_1)x^3 + \cdots$$

und der Vergleich mit der linken Seite liefert $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 - \frac{1}{2!}a_0 = \frac{1}{2!}$ sowie $a_3 - \frac{1}{2!}a_1 = \frac{1}{3!}$, also $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ und $a_3 = \frac{2}{3}$.

(b) Wir suchen Zahlen a_n mit

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \qquad \text{also} \qquad 1 = (x^2 + 2x - 3)\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n\,.$$

Nun gilt wegen $x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$

$$\begin{aligned}(x^2 + 2x - 3)\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^{n+2} - 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n \\ &= -4a_0 - 4a_1(x+1) + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-2} - 4a_n)(x+1)^n\,.\end{aligned}$$

Nach dem Identitätssatz für Potenzreihen hat diese Potenzreihe den Wert 1 genau dann, wenn die folgenden Gleichungen erfüllt sind:

$$-4a_0 = 1, \qquad -4a_1 = 0, \qquad a_{n-2} - 4a_n = 0 \quad \text{für alle } n \ge 2\,.$$

Es folgt: $a_0 = -\frac{1}{4}$, $a_1 = 0$ und $a_n = \frac{1}{4}a_{n-2}$ für jedes $n \ge 2$. Vollständige Induktion liefert: $a_{2k+1} = 0$ und $a_{2k} = -(\frac{1}{4})^{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Aufgabe 3:

(a) Nach der Kettenregel ist die Funktion f auf $(0,\infty)$ differenzierbar und für alle $x > 0$ gilt

$$f'(x) = \arctan'(x) + \arctan'(x^{-1}) \cdot \big(-x^{-2}\big) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(x^{-1})^2} \cdot \big(-x^{-2}\big) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0\,.$$

Da die Ableitung von f auf $(0,\infty)$ verschwindet, ist f auf $(0,\infty)$ konstant. Für alle $x > 0$ gilt

$$f(x) = f(1) = 2\arctan(1) = 2 \cdot \tfrac{\pi}{4} = \tfrac{\pi}{2}\,.$$

(b) (i) Für $x > 0$ gilt

$$f'(x) = \ln(x)\,(\ln(x) + 2)\,.$$

Nach Abscnitt 11.13 erfüllt ein lokales Extremum die notwendige Bedingung $f'(x) = 0$, daher kommen nur die Punkte $x_1^* = 1$ und $x_2^* = e^{-2}$ (beide liegen im Definitionsbereich von f!) als lokale Extrema in Frage.
Die zweite Ableitung von f ist

$$f''(x) = \frac{2}{x}\,(\ln(x) + 1)$$

und $f''(x_1^*) = 2 > 0, f''(x_2^*) = -2e^2 < 0$. Folglich besitz f in x_1^* ein Minimum und in x_2^* ein Maximum. Die Funktionswerte an diesen Stellen sind

$$f(x_1^*) = f(1) = 0 \quad \text{und} \quad f(x_2^*) = f(e^{-2}) = 4e^{-2}.$$

(ii) Es ist

$$f'(x) = \frac{4 - x^2}{(x^2+4)^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Da ein lokales Extremum die notwendige Bedingung $f'(x) = 0$ erfüllt, kommen nur die Punkte $x_1^* = 2$ und $x_2^* = -2$ (beide liegen im Definitionsbereich von f!) als lokale Extrema in Frage.
Die zweite Ableitung von f ist

$$f''(x) = \frac{2x^3 - 24x}{(x^2+4)^3}.$$

Wegen

$$f''(2) = -\frac{1}{16} < 0 \quad \text{und} \quad f''(-2) = \frac{1}{16} > 0,$$

besitz f in $x_1^* = 2$ ein Maximum und in $x_2^* = -2$ ein Maximum. Die Funktionswerte an diesen Stellen sind

$$f(-2) = -\frac{1}{4} \quad \text{und} \quad f(2) = \frac{1}{4}.$$

Aufgabe 4: Wird in der Übung am 15.1.2016 besprochen.