Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Silvana Avramska-Lukarska

WS 2015/16
12.1.2016

Höhere Mathematik I

für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 11. Übungsblatt

Aufgabe 1:

(a) Sei $f\colon [a,b] \to [0,\infty)$ stetig und es existiere ein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) > 0$. Sei $\varepsilon := \frac{1}{2} f(x_0)$. Nach Voraussetzung ist $\epsilon > 0$ und aufgrund der Stetigkeit von f in x_0 existiert ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ für alle $x \in [a,b]$ mit $|x - x_0| < \delta$. Für solche x gilt nach der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$f(x) = f(x_0) - (-f(x) + f(x_0)) \geq f(x_0) - |f(x) - f(x_0)| \geq 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon\,.$$

Setzt man $\alpha := \max\{a, x_0 - \delta\}$ und $\beta := \min\{b, x_0 + \delta\}$, so gilt $a \leq \alpha < \beta \leq b$ und $f(x) \geq \varepsilon$ für alle $x \in [\alpha, \beta]$. Zusammen mit der Abschätzung $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$ folgt

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^\alpha f(x)\,dx + \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^b f(x)\,dx \\ &\geq \int_a^\alpha 0\,dx + \int_\alpha^\beta \varepsilon\,dx + \int_\beta^b 0\,dx = (\beta - \alpha)\varepsilon > 0\,.\end{aligned}$$

(b) Seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in [a,b]$ und $f(x_0) > g(x_0)$ für ein $x_0 \in [a,b]$. Betrachte die Funktion $h : [a,b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto h(x) := f(x) - g(x)$. Dann ist h als Komposition stetiger Funktionen stetig, und es gilt $h(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Außerdem ist $h(x_0) = f(x_0) - g(x_0) > 0$. Somit sind die Voraussetzungen des (a)-Teils für die Funktion h erfüllt. Dieser liefert

$$\int_a^b h(x)\,dx > 0\,,$$

woraus aufgrund der Linearität des Integrals

$$\int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b g(x)\,dx$$

folgt.

Aufgabe 2:

(a) Zuerst schreiben wir das Integral als Summe zweier Integrale, verwenden dann im ersten Integral die Substitution $t := -x$, $dt = (-1)\,dx$ und schließlich $f(-t) = f(t)$ für alle $t \in [-a,a]$

$$\begin{aligned}\int_{-a}^a f(x)\,dx &= \int_{-a}^0 f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = \int_a^0 f(-t)\,(-1)\,dt + \int_0^a f(x)\,dx \\ &= \int_0^a f(-t)\,dt + \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(t)\,dt + \int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx\,.\end{aligned}$$

(b) Ähnliches Vorgehen wie in **a)** ergibt

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(-t)\,(-1)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\ &= \int_{0}^{a} f(-t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} -f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\ &= \int_{0}^{a} \big(-f(x) + f(x)\big)\,dx = 0\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 3:

(i) Hier kann man sofort eine Stammfunktion hinschreiben:

$$\int_{0}^{1} (1+2x)^3\,dx = \tfrac{1}{8}(1+2x)^4\Big|_{x=0}^{1} = \tfrac{1}{8}(3^4 - 1^4) = 10\,.$$

(ii) Wir zerlegen das Intervall:

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} |x-1|\,dx &= \int_{-2}^{1} |x-1|\,dx + \int_{1}^{2} |x-1|\,dx = \int_{-2}^{1} (1-x)\,dx + \int_{1}^{2} (x-1)\,dx \\ &= \big(x - \tfrac{1}{2}x^2\big)\Big|_{x=-2}^{1} + \big(\tfrac{1}{2}x^2 - x\big)\Big|_{x=1}^{2} \\ &= \big(1-\tfrac{1}{2}\big) - (-2-2) + (2-2) - \big(\tfrac{1}{2} - 1\big) = 5\,.\end{aligned}$$

(iii) Hier wenden wir die Substitutionsregel mit $t = \sqrt{x}$ (d.h. $g(t) = t^2$ für $t \geq 0$) an. Wir ersetzen also dx durch $g'(t)dt = 2tdt$. Dabei müssen wir auch die Integrationsgrenzen anpassen: $x = 1$ entspricht $t = 1$ und $x = 4$ entspricht $t = 2$.

$$\begin{aligned}\int_{1}^{4} \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x}\,)}\,dx &= \int_{1}^{4} f(x)\,dx = \int_{g^{-1}(1)}^{g^{-1}(4)} f\Big(g(t)\Big)g'(t)\,dt = \int_{1}^{2} \frac{1}{t(1+t)} \cdot 2t\,dt \\ &= \int_{1}^{2} \frac{2}{1+t}\,dt = 2\ln|1+t|\,\Big|_{t=1}^{2} = 2\big(\ln(3) - \ln(2)\big) = 2\ln\big(\tfrac{3}{2}\big)\ .\end{aligned}$$

(iv) Um dieses Integral zu berechnen, verwenden wir partielle Integration für $f'(x) = x$ und $g(x) = \ln(x)$. Mit $g'(x) = x^{-1}$ und $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ folgt

$$\begin{aligned}\int_{1}^{e} x\ln(x)\,dx &= \int_{1}^{e} f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_{x=1}^{e} - \int_{1}^{e} f(x)g'(x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}x^2\ln(x)\Big|_{x=1}^{e} - \int_{1}^{e} \tfrac{1}{2}x^2x^{-1}\,dx = \frac{1}{2}\left(e^2\ln(e) - \ln(1)\right) - \int_{1}^{e} \tfrac{1}{2}x\,dx \\ &= \frac{1}{2}e^2 - \big(\tfrac{1}{4}x^2\big)\Big|_{x=1}^{e} = \frac{1}{2}e^2 - \tfrac{1}{4}(e^2-1) = \tfrac{1}{4}(e^2+1)\,.\end{aligned}$$

(v) Die Substitution $t = e^{x^2}$, $dt = 2xe^{x^2}\,dx$ führt auf

$$\int_0^1 x\,e^{2x^2}\sin(e^{x^2})\,dx = \frac{1}{2}\int_1^e t\sin t\,dt\,.$$

Mithilfe von partieller Integration ist

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_1^e t\sin(t)\,dt &= -\frac{t}{2}\cos(t)\Big|_1^e + \frac{1}{2}\int_1^e \cos(t)\,dt \\ &= \frac{-t\cos(t)+\sin(t)}{2}\Big|_1^e = -\frac{e}{2}\cos(e) + \frac{\sin(e)}{2} + \frac{\cos(1)-\sin(1)}{2}\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 4:

(i) Hier substituieren wir $t = e^x$. Dies liefert $dt = e^x\,dx$ und damit

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \Big(\arctan(t) + C\Big)\Big|_{t=e^x} = \arctan(e^x) + C\,,$$

wobei $C \in \mathbb{R}$ beliebig.

(ii) Die Substitution $t = 1-x$ liefert $dt = (-1)\,dx$, also

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{1-x}}\,dx &= \int \frac{1-t}{\sqrt{t}}(-1)\,dt = \int (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})\,dt = \left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - 2t^{\frac{1}{2}} + C\right)\Big|_{t=1-x} \\ &= \frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} - 2(1-x)^{\frac{1}{2}} + C\,,\end{aligned}$$

wobei $C \in \mathbb{R}$ beliebig.

Aufgabe 5: Es gilt

$$a_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,dx = -\cos x\Big|_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - (-\cos(0)) = 1\,.$$

Zur Berechnung von a_2 benutzen wir partielle Integration mit $f'(x) = \sin x$ und $g(x) = \sin x$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\sin(x)\big)^2\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cdot\sin(x)\,dx = -\cos(x)\cdot\sin(x)\Big|_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos(x)\cdot\cos(x)\,dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\cos(x)\big)^2\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(1 - \big(\sin(x)\big)^2\Big)\,dx = \tfrac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\sin(x)\big)^2\,dx\,.\end{aligned}$$

Betrachtet man den ersten und den letzten Term in dieser Gleichungskette, so folgt

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\sin(x)\big)^2\,dx = \frac{\pi}{2}\,, \qquad \text{also} \qquad a_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\sin(x)\big)^2\,dx = \tfrac{\pi}{4}\,.$$

Nun sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 2$. Partielle Integration führt auf

$$\begin{aligned}
a_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\sin(x)\big)^n \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\sin(x)\big) \cdot \big(\sin(x)\big)^{n-1} \, dx \\
&= -\cos(x) \cdot \big(\sin(x)\big)^{n-1} \Big|_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos(x)(n-1)\big(\sin(x)\big)^{n-2} \cos(x) \, dx \\
&= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\sin(x)\big)^{n-2}\big(\cos(x)\big)^2 \, dx = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\sin(x)\big)^{n-2}\Big(1 - \big(\sin(x)\big)^2\Big) \, dx \\
&= (n-1)\bigg(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\sin(x)\big)^{n-2} \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\sin(x)\big)^n \, dx\bigg) = (n-1)(a_{n-2} - a_n)\,,
\end{aligned}$$

also

$$a_n = \frac{n-1}{n} \, a_{n-2} \, .$$

Mit Hilfe dieser Rekursionsformel erhalten wir

$$a_3 = \frac{2}{3} \, a_1 = \frac{2}{3}\,, \qquad a_4 = \frac{3}{4} \, a_2 = \frac{3\pi}{16}\,, \qquad a_5 = \frac{4}{5} \, a_3 = \frac{8}{15}\,, \qquad a_6 = \frac{5}{6} \, a_4 = \frac{5\pi}{32}\,.$$

Bemerkung: Ist n gerade, d.h. existiert $k \in \mathbb{N}$ mit $n = 2k$, so gilt

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{n-1}{n} \, a_{n-2} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \, a_{n-4} = \ldots = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2} \, a_0 \\
&= \frac{(2k-1) \cdot (2k-3) \cdot (2k-5) \cdot \ldots \cdot 1}{2k \cdot 2(k-1) \cdot 2(k-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2k)!}{2^{2k} \cdot (k!)^2} \, \frac{\pi}{2}\,.
\end{aligned}$$

Ist n ungerade, d.h. existiert $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit $n = 2k+1$, so gilt

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{n-1}{n} \, a_{n-2} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \, a_{n-4} = \ldots = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{3} \, a_1 \\
&= \frac{(n-1)^2 \cdot (n-3)^2 \cdot (n-5)^2 \cdot \ldots \cdot 2^2}{n!} \cdot 1 \\
&= \frac{(2k)^2 \cdot (2(k-1))^2 \cdot (2(k-2))^2 \cdot \ldots \cdot (2 \cdot 1)^2}{(2k+1)!} = \frac{2^{2k} \cdot (k!)^2}{(2k+1)!}\,.
\end{aligned}$$

Diese expliziten Darstellungen von a_n bestätigt man leicht mit Hilfe von vollständiger Induktion.