Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Silvana Avramska-Lukarska

WS 2015/16
20.1.2016

Höhere Mathematik I
für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 12. Übungsblatt

Aufgabe 1:

(i) Für beliebiges $r > 2$ erhalten wir mittels der Substitution $t = \ln(x)$, $dt = x^{-1}\,dx$

$$\int_2^r \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx = \int_{\ln(2)}^{\ln(r)} \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t}\Big|_{t=\ln(2)}^{\ln(r)} = \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(r)}\,.$$

Für $r \to \infty$ strebt dies gegen $(\ln(2))^{-1}$; das uneigentliche Integral konvergiert also und hat diesen Wert.

(ii) Da der Integrand $f(x) := \frac{1}{2\sqrt{x}-x^2}$ auf $(0,1]$ stetig ist, ist f auf jedem Intervall $[\varepsilon, 1]$, $0 < \varepsilon < 1$, integrierbar. Für alle $x \in (0,1]$ gilt $x^2 \le \sqrt{x}$ und damit

$$|f(x)| = \frac{1}{2\sqrt{x}-x^2} \le \frac{1}{2\sqrt{x}-\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}\,.$$

Da das uneigentliche Integral $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ konvergiert, ist $\int\limits_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}-x^2}\,dx$ nach dem Majorantenkriterium konvergent.

(iii) Da

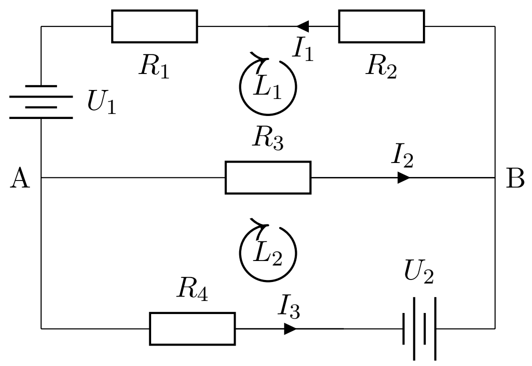
$$\left|\frac{e^{2x}}{1+e^x}\right| = \frac{e^{2x}}{1+e^x} \le \frac{e^{2x}}{e^x} = e^x$$

für alle $x \in (-\infty, 3]$ gilt und das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^3 e^x\,dx = \lim_{r\to-\infty} \int_r^3 e^x\,dx = \lim_{r\to-\infty} \left(e^x\Big|_{x=r}^3\right) = \lim_{r\to-\infty}\left(e^3 - e^r\right) = e^3$$

existiert, ist $\int\limits_{-\infty}^3 \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx$ nach dem Majorantenkriterium konvergent.

Aufgabe 2:



Durch Betrachtung der Knoten A, B bzw. der Maschen L_1, L_2 erhalten wir

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 - I_3 &= 0 \\ -I_1 + I_2 + I_3 &= 0 \\ -6I_1 - I_2 &= -25 \\ I_2 - 2I_3 &= -5 \end{aligned}$$

und dies ist äquivalent zu

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -6 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}}_{=:A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}}_{=:\vec{I}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -25 \\ -5 \end{pmatrix}}_{=:\vec{b}}$$

Um dieses System zu lösen, bringen wir die Matrix A auf ihre Zeilenstufenform:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -6 & -1 & 0 & -25 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -1 & 0 & -25 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ -6 & -1 & 0 & -25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & -7 & -6 & -25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -20 & -60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

d.h.

$$A\vec{I} = \vec{b} \iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -60 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Durch Ruckwärtseinsetzen erhalten wir

$$\begin{aligned} -20I_3 &= -60 &\quad\Rightarrow\quad& I_3 = 3 \\ I_2 - 2I_3 &= -5 &\quad\Rightarrow\quad& I_2 = 1 \\ I_1 - I_2 - I_3 &= 0 &\quad\Rightarrow\quad& I_1 = 4. \end{aligned}$$

Aufgabe 3:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} (-3) + 2 - (-3) - 2 &= 0 \quad (u_1) \\ 3 + (-1) - 1 - 1 &= 0 \quad (u_2) \\ -7 + 3 - (-7) - 3 &= 0 \quad (u_3) \end{aligned}$$

und damit $u_1, u_2, u_3 \in U$.

Zunächst zeigen wir, dass U ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$ ist. Nach dem Untervektorraumkriterium aus Abschnitt 8.4 der Vorlesung ist zu zeigen:

- $0 \in U$: dies ist klar.
- Für alle $x, y \in U$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $x + y \in U$ und $\alpha x \in U$: Es gilt in der Tat

  $$(x+y)_1+(x+y)_2-(x+y)_3-(x+y)_4 = \underbrace{(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)}_{=0} + \underbrace{(y_1 + y_2 - y_3 - y_4)}_{=0} = 0$$

  sowie

  $$(\alpha x)_1 + (\alpha x)_2 - (\alpha x)_3 - (\alpha x)_4 = \alpha \cdot \underbrace{(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)}_{=0} = 0.$$

Sei nun $x \in \operatorname{lin}(\{u_1, u_2, u_3\})$. Es existieren also $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3.$$

Da nach Obigem U ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$ ist und $u_1, u_2, u_3 \in U$, liegt auch ihre Linearkombination x in U.

(b) Nun zeigen wir, dass die Vektoren u_1, u_2, u_3 linear unabhängig ist. Dazu schreiben wir die Vektoren u_1, u_2, u_3 als Zeilen der Matrix A und bringen diese auf Zeilenstufenform:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ -7 & 3 & -7 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \hookleftarrow + \\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ -7 & 3 & -7 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-\frac{7}{3}) \\ \\ \hookleftarrow + \end{array} \\ &\sim \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -\frac{5}{3} & 0 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \cdot\frac{5}{3} \\ \hookleftarrow + \end{array} \sim \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{10}{3} & \frac{10}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ablesen liefert den Zeilenrang $r = 3$. Nach Abschnitt 15.7 der Vorlesung ($r = n$), sind die Zeilen von A damit in der Tat linear unabhängig.