Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Silvana Avramska-Lukarska

WS 2015/16
28.1.2016

Höhere Mathematik I

für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 13. Übungsblatt

Aufgabe 1: Um das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl}
x_1 & - & 2\,x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 = & 0 \\
4\,x_1 & - & 8\,x_2 & + & 3\,x_3 & - & 3\,x_4 & + & x_5 = & 2 \\
-2\,x_1 & + & 4\,x_2 & - & 2\,x_3 & - & x_4 & + & 4\,x_5 = & -3 \\
x_1 & - & 2\,x_2 & & & - & 3\,x_4 & + & 4\,x_5 = & -1
\end{array}$$

zu lösen, bestimmen wir die Zeilennormalform der zugehörigen erweiterten Matrix

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\
4 & -8 & 3 & -3 & 1 & 2 \\
-2 & 4 & -2 & -1 & 4 & -3 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & -1
\end{array}\right)
\begin{array}{l} \cdot(-4)\ \ \cdot 2\ \ \cdot(-1) \\ + \\ + \\ + \end{array}
\rightsquigarrow
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & -3 \\
0 & 0 & -1 & -2 & 3 & -1
\end{array}\right)
\begin{array}{l} \\ \mid(-1) \\ \mid(-\frac{1}{3}) \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\
0 & 0 & -1 & -2 & 3 & -1
\end{array}\right)
\begin{array}{l} \\ \\ \\ + \end{array}
\rightsquigarrow
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & -3
\end{array}\right)
\begin{array}{l} + \\ \cdot(-1) \\ \cdot 3 \\ + \end{array}$$

$$\rightsquigarrow
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & -2 & 0 & 0 & -2 & 2 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\begin{array}{l} \\ + \\ \\ \\ \end{array}
\rightsquigarrow
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & -2 & 0 & 0 & -2 & 2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)$$

und verwenden den (-1)-Ergänzungstrick, d.h. wir lassen Nullzeilen in der Zeilennormalform weg und ergänzen Zeilen mit -1 und sonst Nullen so, dass auf der Diagonalen nur ± 1 steht:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & -2 & 0 & 0 & -2 & 2 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0
\end{array}\right).$$

Nun können wir die allgemeine Lösung $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$ des linearen Gleichungssystems ablesen:

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (s, t \in \mathbb{R}).$$

Aufgabe 2:

(a) (i) Offenbar ist $v_1 = -2v_3$. Daher gilt $v_1 + 0v_2 + 2v_3 = 0$, d.h. es gibt eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors. Also sind die Vektoren v_1, v_2, v_3 linear abhängig. Im allgemeinen erkennt man nicht sofort, ob gegebene Vektoren linear unabhängig sind oder nicht. Um die Vektoren v_1, v_2, v_3 auf lineare Unabhängigkeit zu prüfen, können wir v_1, v_2, v_3 als Zeilen in eine Matrix schreiben und diese durch Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform bringen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 8 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da die letzte Zeile der letzten Matrix eine Nullzeile ist, sind v_1, v_2, v_3 linear abhängig.

(ii) Gäbe es $\alpha_1, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ mit $v_2 = \alpha_1 v_1 + \alpha_3 v_3$, so müsste für die erste Komponente gelten: $3 = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 = 0$. Dies ist nicht möglich. Deshalb gibt es keine Zahlen $\alpha_1, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ mit $v_2 = \alpha_1 v_1 + \alpha_3 v_3$.

(b) Wir schreiben die Vektoren v_1, v_2, v_3 als Zeilen einer Matrix und bringen diese auf Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1-a \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix}$$

Die letzte Zeile der letzten Matrix ist eine Nullzeile nur für $a = 2$, d.h. die Vektoren v_1, v_2, v_3 sind nur für $a = 2$ linear abhängig.

Aufgabe 3: Um den Kern A zu bestimmen, bringen wir die Matrix A auf ihre Zeilennormalform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \mid -\frac{1}{5} \\ \mid \frac{1}{5} \end{array} \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe des (-1)-Ergänzungstricks lesen wir ab

$$\operatorname{Kern} A = \{x \in \mathbb{R}^4 : Ax = 0\} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ferner erkennen wir an der Zeilennormalform von A, dass erste, zweite und vierte Spalte von A linear unabhängig sind, und folglich

$$\operatorname{Bild} A = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$$

Per Definition ist

$$\operatorname{Rang} A = \dim \operatorname{Bild} A = 3.$$

Aufgabe 4: Aufgrund der Linearität von ϕ gilt

$$\begin{aligned}
\phi(e_1) &= \phi(e_1+e_2+e_3)-\phi(e_2+e_3) = (e_2-e_3)-e_1 = (-1)e_1+1e_2+(-1)e_3\,,\\
\phi(e_2) &= \phi(e_2+e_3)-\phi(e_3) = e_1-(2e_1+3e_2+5e_3) = (-1)e_1+(-3)e_2+(-5)e_3\,,\\
\phi(e_3) &= 2e_1+3e_2+5e_3\,.
\end{aligned}$$

Somit lautet die Darstellungsmatrix von ϕ bezüglich der Standardbasis e_1, e_2, e_3 des $\mathbb{R}^3$ (siehe Abschnitt 15.14)

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2\\ 1 & -3 & 3\\ -1 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$