Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Silvana Avramska-Lukarska

WS 2015/16
9.2.2016

Höhere Mathematik I

für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 15. Übungsblatt

Aufgabe 1:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}\|v+w\|^2+\|v-w\|^2 &= (v+w|v+w)+(v-w|v-w)\\ &= (v|v)+(v|w)+(w|v)+(w|w)+(v|v)+(v|-w)+(-w|v)+(-w|-w)\\ &= (v|v)+(v|w)+(w|v)+(w|w)+(v|v)-(v|w)-(w|v)+(w|w)\\ &= 2\big((v|v)+(w|w)\big)=2\big(\|v\|^2+\|w\|^2\big).\end{aligned}$$

(b) Ähnlich gilt

$$\begin{aligned}\|v+w\|^2-\|v-w\|^2 &= (v+w|v+w)+(v-w|v-w)\\ &= (v|v)+(v|w)+(w|v)+(w|w)-\big((v|v)+(v|-w)+(-w|v)+(-w|-w)\big)\\ &= (v|v)+(v|w)+(w|v)+(w|w)-(v|v)+(v|w)+(w|v)-(w|w)\\ &= 2\big((v|w)+(w|v)\big)=2\big((v|w)+\overline{(v|w)}\big)\\ &= 2\cdot 2\,\mathrm{Re}(v|w)=4\,\mathrm{Re}(v|w).\end{aligned}$$

Aufgabe 2:

(a) Da

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2i&0\\5&3i&1\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2i&-2\\0&3i&-4\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2i&-2\\0&0&-1\end{pmatrix},$$

sind die Vektoren $\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3$ linear unabhängig. Nach Abschnitt 16.4 gilt

$$\vec{b}_1:=\frac{\vec{x}_1}{\|\vec{x}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{1\cdot\overline{1}+0\cdot\overline{0}+1\cdot\overline{1}}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},$$

und wegen

$$(\vec{x}_2|\vec{b}_1)=\left(\begin{pmatrix}2\\2i\\0\end{pmatrix}\,\Big|\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}(2\cdot\overline{1}+2i\cdot\overline{0}+0\cdot\overline{1})=\frac{2}{\sqrt{2}}$$

erhalten wir

$$\vec{c}_2:=\vec{x}_2-(\vec{x}_2|\vec{b}_1)\vec{v}_1=\begin{pmatrix}2\\2i\\0\end{pmatrix}-\frac{2}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2i\\-1\end{pmatrix}$$

und

$$\vec{b}_2:=\frac{\vec{c}_2}{\|\vec{c}_2\|}=\frac{1}{\sqrt{1\cdot\overline{1}+2i\cdot\overline{2i}+(-1)\cdot\overline{(-1)}}}\begin{pmatrix}1\\2i\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2i\\-1\end{pmatrix}.$$

Für die Berechnung von $\vec{c}_3$ brauchen wir die Skalarprodukte

$$(\vec{x}_3|\vec{b}_1) = \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 3i \\ 1 \end{pmatrix} \Big| \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(5 \cdot \overline{1} + 3i \cdot \overline{0} + 1 \cdot \overline{1}) = \frac{6}{\sqrt{2}},$$

$$(\vec{x}_3|\vec{b}_2) = \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 3i \\ 1 \end{pmatrix} \Big| \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{6}}(5 \cdot \overline{1} + 3i \cdot \overline{2i} + 1 \cdot \overline{(-1)}) = \frac{10}{\sqrt{6}}.$$

Damit ergibt sich dann

$$\vec{c}_3 := \vec{x}_3 - \sum_{j=1}^{2} (\vec{x}_3|\vec{b}_j)\vec{b}_j = \begin{pmatrix} 5 \\ 3i \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{6}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{10}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{b}_3 := \frac{\vec{c}_3}{\|\vec{c}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Wir wollen das Verfahren von Gram-Schmidt benutzen. Dazu prüfen wir zuerst die gegebenen Vektoren $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3$ auf lineare Unabhängigkeit:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-5)\ \ \cdot 3 \\ + \\ + \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -4 & 6 \\ 0 & -6 & 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ + \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Somit sind die Vektoren $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3$ linear abhängig, etwa $-2\vec{y}_1 + \vec{y}_2 + \vec{y}_3 = \vec{0}$. Insbesondere ist $\vec{y}_3 = 2\vec{y}_1 - \vec{y}_2 \in \operatorname{lin}(\vec{y}_1, \vec{y}_2)$, woraus $\operatorname{lin}(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3) = \operatorname{lin}(\vec{y}_1, \vec{y}_2)$ folgt. Der obigen Rechnung können wir auch entnehmen, dass $\vec{y}_1, \vec{y}_2$ linear unabhängig sind. Zur Berechnung einer Orthonormalbasis von $\operatorname{lin}(\vec{y}_1, \vec{y}_2)$ führen wir nun das Verfahren von Gram-Schmidt durch:

$$\vec{b}_1 := \frac{\vec{y}_1}{\|\vec{y}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1 + (-1)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Den zweiten Vektor setzen wir

$$\begin{aligned} \vec{c}_2 := \vec{y}_2 - (\vec{y}_2|\vec{b}_1)\vec{b}_1 &= \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Big| \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}(5 \cdot \overline{1} + 1 \cdot \overline{(-1)} + 1 \cdot \overline{1} + 1 \cdot \overline{(-1)}) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\vec{b}_2 = \frac{\vec{c}_2}{\|\vec{c}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ eine Orthonormalbasis von $\operatorname{lin}(\vec{y}_1, \vec{y}_2) = \operatorname{lin}(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$.

(c) Wir führen wir das Verfahren von Gram-Schmidt auf die Basis $e_1(x) = 1, e_2(x) = x, e_3(x) = x^2$:

$$b_1(x) := \frac{e_1(x)}{\|e_1(x)\|} = \frac{1}{\sqrt{\int\limits_{-1}^{1} 1 \cdot 1\,dx}} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

und wegen

$$\big(e_2(x)|b_1(x)\big) = \int\limits_{-1}^{1} x \cdot 1\,dx = 0$$

erhalten wir

$$c_2(x) := e_2(x) - \big(e_2(x)|b_1(x)\big)b_1(x) = x - 0 \cdot 1 = x$$

und

$$b_2(x) := \frac{c_2(x)}{\|c_2(x)\|} = \frac{1}{\sqrt{\int\limits_{-1}^{1} x \cdot x\,dx}} \cdot x = \sqrt{\frac{3}{2}}x.$$

Für den dritten Vektor setzen wir

$$\begin{aligned}
c_3(x) &:= e_3(x) - \big(e_3(x)|b_1(x)\big)b_1(x) - \big(e_3(x)|b_2(x)\big)b_2(x) \\
&= x^2 - \Big(\int\limits_{-1}^{1} x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\,dx\Big) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \Big(\int\limits_{-1}^{1} x^2 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}x\,dx\Big) \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}x \\
&= x^2 - \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

und

$$b_3(x) := \frac{c_3(x)}{\|c_3(x)\|} = \frac{1}{\sqrt{\int\limits_{-1}^{1} \big(x^2 - \frac{1}{3}\big)^2\,dx}} \cdot \big(x^2 - \frac{1}{3}\big) = \sqrt{\frac{5}{2}}\Big(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\Big).$$

Aufgabe 3: Es gilt

$$A = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 2i & -i\sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2i}{\sqrt{6}} & -\frac{i}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Aus Aufgabe 2(a) wissen wir, dass die Spalten von der Matrix A eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^3$ bilden. Nach Abschnitt 16.6 folgt dann

$$A^{-1} = A^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2i}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{i}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} \\ 1 & -2i & -1 \\ \sqrt{2} & i\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$