

**Höhere Mathematik I für die Fachrichtung
Elektrotechnik und Informationstechnik
Lösungsvorschläge zum 1. Übungsblatt**

Aufgabe 1

- a) Die Menge aller derer, die in Karlsruhe im ersten Hochschulsesemester sind und Physik studieren, lässt sich ausdrücken durch

$$\{x : x \in S_1 \wedge x \in P\} = S_1 \cap P.$$

- b) Die Menge aller Karlsruher Studierenden, die im ersten oder dritten Hochschulsesemester sind, aber nicht Elektrotechnik studieren, ist gleich

$$\{x : (x \in S_1 \vee x \in S_3) \wedge x \notin E\} = \{x : x \in S_1 \cup S_3 \wedge x \notin E\} = (S_1 \cup S_3) \setminus E.$$

- c) Die Menge aller Studierenden in Karlsruhe entspricht

$$\{x : x \in S_1 \vee x \in S_2 \vee x \in S_3 \vee x \in S_4 \vee \dots\} = \{x : \exists j \in \mathbb{N} : x \in S_j\} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} S_j.$$

Aufgabe 2

Gegeben seien eine Menge M sowie Teilmengen M_1, M_2, M_3 von M .

- a) Um die Äquivalenz $M_1 \subset M_2 \Leftrightarrow M \setminus M_2 \subset M \setminus M_1$ zu zeigen, weisen wir die Gültigkeit der Implikationen $M_1 \subset M_2 \Rightarrow M \setminus M_2 \subset M \setminus M_1$ und $M_1 \subset M_2 \Leftarrow M \setminus M_2 \subset M \setminus M_1$ nach.
„ \Rightarrow “: Es gelte $M_1 \subset M_2$, sei also jedes Element von M_1 auch in M_2 enthalten. Wir müssen nun zeigen: $M \setminus M_2 \subset M \setminus M_1$ (bzw. in Worten: Jedes Element von M , das nicht in M_2 liegt, liegt auch nicht in M_1 .)
Jedes Element der Menge $M \setminus M_2$ ist nicht in M_2 und damit erst recht nicht in M_1 ; folglich liegt es in $M \setminus M_1$. Also gilt $M \setminus M_2 \subset M \setminus M_1$.
„ \Leftarrow “: Es gelte $M \setminus M_2 \subset M \setminus M_1$. Zu zeigen ist $M_1 \subset M_2$.
Nach der Voraussetzung $M \setminus M_2 \subset M \setminus M_1$ liegt jedes Element von M , das nicht in M_2 liegt, auch nicht in M_1 . Dann ist notwendigerweise jedes Element von M_1 auch in M_2 , da es ja sonst nicht in M_1 liegen würde. Also ist $M_1 \subset M_2$.
- b) Es gelte $M_1 \subset M_2$ und $M_2 \subset M_3$. Um $M_1 \subset M_3$ zu zeigen, müssen wir begründen, warum jedes Element aus M_1 auch in M_3 liegt. Sei hierzu $x \in M_1$ beliebig. Wegen $M_1 \subset M_2$ liegt x auch in M_2 und aufgrund von $M_2 \subset M_3$ ist x auch in M_3 enthalten.
Da $x \in M_1$ beliebig war, haben wir eingesehen, dass jedes Element aus M_1 ebenfalls in M_3 liegt, d.h. $M_1 \subset M_3$.
- c) Die Äquivalenz der drei Aussagen i), ii), iii) erhalten wir am geschicktesten aus der Implikationskette „i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii) \Rightarrow i)“.
„i) \Rightarrow ii)“: Es gelte $M_1 \subset M_2$. Um nun die Gleichheit der beiden Mengen $M_1 \cap M_2$ und M_1 zu zeigen, brauchen wir nur die eine Inklusion $M_1 \subset M_1 \cap M_2$ einzusehen (die umgekehrte Inklusion gilt ohnehin). Sei dazu $x \in M_1$. Wegen $M_1 \subset M_2$ ist auch $x \in M_2$. Dann ist aber x sowohl in M_1 als auch in M_2 , also in $M_1 \cap M_2$.

„ii) \Rightarrow iii)“: Hier müssen wir unter der Voraussetzung $M_1 \cap M_2 = M_1$ nur die Inklusion $M_1 \cup M_2 \subset M_2$ nachweisen. Sei also $x \in M_1 \cup M_2$. Ist $x \in M_2$, so ist nichts zu zeigen. Ist $x \in M_1 = M_1 \cap M_2$, so ist $x \in M_2$, was zu zeigen war.

„iii) \Rightarrow i)“: Sei hierzu $x \in M_1$. Dann ist jedenfalls $x \in M_1 \cup M_2 = M_2$.

Aufgabe 3

a) Es gilt

$$\begin{aligned} |x - 4| = |x + 1| &\Leftrightarrow (x - 4)^2 = (x + 1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = x^2 + 2x + 1 \\ &\Leftrightarrow 10x = 15 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Alternativ führen auch geometrische Überlegungen zum Ziel: Gesucht sind diejenigen $x \in \mathbb{R}$, die denselben Abstand zu 4 wie zu -1 haben, d.h. x liegt genau in der Mitte: $x = \frac{4+(-1)}{2} = \frac{3}{2}$.

Eine weitere Alternative besteht darin, die Fallunterscheidung $x \in (-\infty, -1]$, $x \in (-1, 4]$, $x \in (4, \infty)$ durchzuführen, um die Beträge aufzulösen...

b) $|2x| > |5 - 2x|$ besagt, dass notwendig $x \neq 0$ sein muss. Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt aber

$$\begin{aligned} |2x| > |5 - 2x| &\Leftrightarrow \left| \frac{5 - 2x}{2x} \right| < 1 \Leftrightarrow -1 < \underbrace{\frac{5 - 2x}{2x}}_{=\frac{5}{2x} - 1} < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{5}{2x} < 2 \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{5}x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x > \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

c) Es ist

$$\begin{aligned} |2 - |2 - x|| \leq 1 &\Leftrightarrow -1 \leq 2 - |2 - x| \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq -|2 - x| \leq -1 \\ &\Leftrightarrow 1 \leq |2 - x| \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq 2 - x \leq 3 \text{ oder } -3 \leq 2 - x \leq -1 \\ &\Leftrightarrow -1 \leq -x \leq 1 \text{ oder } -5 \leq -x \leq -3 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1 \text{ oder } 3 \leq x \leq 5 \\ &\Leftrightarrow x \in [-1, 1] \cup [3, 5]. \end{aligned}$$

d) Wir führen eine Fallunterscheidung durch.

1. Fall: $x < 0$. Dann ist $|x| = -x$, und es gilt

$$\begin{aligned} \frac{3x}{1 + |x|} < 4x^2 &\Leftrightarrow 3x < 4x^2(1 - x) \Leftrightarrow 0 < -4x^3 + 4x^2 - 3x \\ &\Leftrightarrow 0 < -4x \left(x^2 - x + \frac{3}{4} \right) \Leftrightarrow 0 < -4x \underbrace{\left[\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \right]}_{\geq \frac{1}{2} > 0} \\ &\Leftrightarrow 0 < -4x \Leftrightarrow x < 0. \end{aligned}$$

2. Fall: $x \geq 0$. Dann ist $|x| = x$, und es gilt

$$\begin{aligned}
 \frac{3x}{1+|x|} < 4x^2 &\Leftrightarrow 3x < 4x^2(1+x) \Leftrightarrow 0 < 4x^3 + 4x^2 - 3x \\
 &\Leftrightarrow 0 < 4x\left(x^2 + x - \frac{3}{4}\right) \Leftrightarrow 0 < 4x\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 1\right] \\
 &\Leftrightarrow 4x > 0 \text{ und } \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 1 > 0 \\
 &\Leftrightarrow x > 0 \text{ und } \left|x + \frac{1}{2}\right| > 1 \\
 &\Leftrightarrow x > 0 \text{ und } \left(x + \frac{1}{2} > 1 \text{ oder } x + \frac{1}{2} < -1\right) \\
 &\Leftrightarrow x > 0 \text{ und } \left(x > \frac{1}{2} \text{ oder } x < -\frac{3}{2}\right) \\
 &\Leftrightarrow x > \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Demzufolge gilt $\frac{3x}{1+|x|} < 4x^2$ genau für $x \in \mathbb{R}$ mit $x < 0$ oder $x > \frac{1}{2}$.

Aufgabe 4

a) Es seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig. Wegen $0 \leq |x+y| \leq |x| + |y|$ (Dreiecksungleichung!) erhalten wir

$$0 < 1 \leq 1 + |x+y| \leq 1 + |x| + |y|,$$

woraus

$$\frac{1}{1+|x+y|} \geq \frac{1}{1+|x|+|y|} \Leftrightarrow -\frac{1}{1+|x+y|} \leq -\frac{1}{1+|x|+|y|} \quad (1)$$

folgt. Mit zweimaliger Verwendung des Tipps kommen wir auf

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|} = 1 - \frac{1}{1+|x+y|} \stackrel{(1)}{\leq} 1 - \frac{1}{1+|x|+|y|} = \frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|}.$$

Damit ist die erste behauptete Ungleichung bewiesen. Nun zur zweiten: Es gilt

$$\begin{aligned}
 |x| + |y| &\geq |x| \geq 0 \\
 \Rightarrow 1 + |x| + |y| &\geq 1 + |x| \geq 1 > 0 \\
 \Rightarrow \frac{1}{1 + |x| + |y|} &\leq \frac{1}{1 + |x|} \\
 \stackrel{|x| \geq 0}{\Rightarrow} \frac{|x|}{1 + |x| + |y|} &\leq \frac{|x|}{1 + |x|}.
 \end{aligned}$$

Ebenso (vertausche x und y) bekommen wir

$$\frac{|y|}{1 + |x| + |y|} \leq \frac{|y|}{1 + |y|}.$$

Damit ergibt sich

$$\frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|} = \frac{|x|}{1+|x|+|y|} + \frac{|y|}{1+|x|+|y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}.$$

b) Wiederum seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir betrachten die beiden Fälle $x - y \geq 0$ und $x - y < 0$.

1. Fall: $x \geq y$. Dann ist $|x - y| = x - y$, und es gilt

$$\begin{aligned}
 \frac{x+y+|x-y|}{2} &= \frac{x+y+x-y}{2} = \frac{2x}{2} = x = \max\{x, y\}, \\
 \frac{x+y-|x-y|}{2} &= \frac{x+y-(x-y)}{2} = \frac{2y}{2} = y = \min\{x, y\}.
 \end{aligned}$$

2. Fall: $x < y$. Dann ist $|x - y| = -(x - y) = -x + y$, und es gilt

$$\frac{x + y + |x - y|}{2} = \frac{x + y - x + y}{2} = \frac{2y}{2} = y = \max\{x, y\},$$

$$\frac{x + y - |x - y|}{2} = \frac{x + y + x - y}{2} = \frac{2x}{2} = x = \min\{x, y\}.$$

Aufgabe 5

a) Es gilt: $z^3 = (3 - i)^3 = (3 - i)(9 - 6i + i^2) = (3 - i)(8 - 6i) = 24 - 18i - 8i + 6i^2 = 18 - 26i$.
Folglich hat z^3 den Realteil 18 und den Imaginärteil -26 . Ferner ist $|z^3| = \sqrt{18^2 + (-26)^2} = \sqrt{1000} = 10\sqrt{10}$. Alternativ kann man $|z^3|$ auch berechnen, ohne z^3 bestimmt zu haben:
 $|z^3| = |z|^3 = \sqrt{3^2 + (-1)^2}^3 = \sqrt{10}^3 = 10\sqrt{10}$.

b) Wir erweitern den Bruch geeignet (Standardtrick: $z\bar{z}$ ist reell, daher ergibt $1/z = 1/z \cdot \bar{z}/\bar{z} = \bar{z}/(z\bar{z})$ einen reellen Nenner):

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{3 - i} = \frac{1}{3 - i} \cdot \frac{3 + i}{3 + i} = \frac{3 + i}{3^2 - i^2} = \frac{3 + i}{10} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10}i.$$

Also hat $1/z$ den Realteil $\frac{3}{10}$ und den Imaginärteil $\frac{1}{10}$. Der Betrag von $1/z$ ist $|1/z| = \sqrt{\frac{9}{100} + \frac{1}{100}} = \sqrt{1/10} = \sqrt{10}/10$, alternativ: $|1/z| = 1/|z| = 1/\sqrt{10} = \sqrt{10}/10$.

c) Es ergibt sich $z \cdot w = (3 - i)(-1 + 2i) = -3 + 6i + i - 2i^2 = -1 + 7i$. Also hat $z \cdot w$ Realteil -1 und Imaginärteil 7 . Außerdem gilt $|z \cdot w| = \sqrt{1 + 49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} = |z| \cdot |w|$.

d) Es ist $\bar{z}^2 = (\overline{3 - i})^2 = (3 + i)^2 = 9 + 6i + i^2 = 8 + 6i$ und wegen $w^2 = (-1 + 2i)^2 = 1 - 4i + 4i^2 = -3 - 4i$ ergibt sich

$$\frac{1}{w^2} = \frac{1}{-3 - 4i} \cdot \frac{-3 + 4i}{-3 + 4i} = \frac{-3 + 4i}{9 - 16i^2} = \frac{-3 + 4i}{25} = -\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i.$$

$\bar{z}^2 + 1/w^2 = (8 + 6i) + (-\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i)$ hat somit Realteil $8 - \frac{3}{25} = \frac{197}{25}$ und Imaginärteil $6 + \frac{4}{25} = \frac{154}{25}$.
Der Betrag von $\bar{z}^2 + 1/w^2$ lautet $|\bar{z}^2 + 1/w^2| = \sqrt{197^2 + 154^2}/25 = \sqrt{2501}/5$.

Aufgabe 6

a) Es gilt $z^2 - 2z + 3 = (z - 1)^2 + 2$. Die Gleichung $z^2 - 2z + 3 = 0$ ist also genau dann erfüllt, wenn $(z - 1)^2 = -2$. Dies bedeutet $z - 1 = i\sqrt{2}$ oder $z - 1 = -i\sqrt{2}$, also hat die Gleichung die zwei Lösungen $z_1 = 1 + i\sqrt{2}$ und $z_2 = 1 - i\sqrt{2}$.

b) Mit dem Ansatz $z = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$) erhalten wir

$$\begin{aligned} z^2 = |z|^2 &\Leftrightarrow a^2 + 2aib + (ib)^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow a^2 + 2aib - b^2 = a^2 + b^2 \\ &\stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} a^2 - b^2 = a^2 + b^2 \text{ und } 2ab = 0 \\ &\Leftrightarrow -2b^2 = 0 \text{ und } (a = 0 \text{ oder } b = 0) \\ &\Leftrightarrow b = 0 \text{ und } (a = 0 \text{ oder } b = 0) \\ &\Leftrightarrow b = 0. \end{aligned}$$

[In (*) verwenden wir, dass zwei komplexe Zahlen genau dann gleich sind, wenn sie den selben Real- und Imaginärteil besitzen.]

Also ist $z^2 = |z|^2$ genau dann erfüllt, wenn $\text{Im}(z) = 0$ bzw. $z \in \mathbb{R}$ ist.