Karlsruhe Institute für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos
Dr. S. Wugalter

WS 2016/17
27.10.2016

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

2. Übungsblatt

Aufgabe 1

Für $i \in \{1,2,3\}$ seien die Abbildungen $f_i : D_i \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_1(x) = \frac{1}{x-1}, \qquad f_2(x) = \frac{x+1}{x-1}, \qquad f_3(x) = x^2 + x + 1.$$

a) Bestimmen Sie für jede Abbildung f_i den maximalen Definitionsbereich $D_i \subset \mathbb{R}$ sowie den Bildbereich $f_i(D_i)$.

b) Welche Abbildungen sind injektiv? Geben Sie zu den injektiven Abbildungen jeweils die Umkehrabbildung an.

c) Welche Kompositionen $f_i \circ f_j$ sind erlaubt? Ist $f_2 \circ (f_1 \circ f_3)$ erlaubt?

d) Geben Sie die Abbildung $f_1 \circ f_2$ explizit an.

Aufgabe 2

Entscheiden Sie jeweils, ob die Mengen Supremum, Infimum, Maximum bzw. Minimum besitzen. Bestimmen Sie gegebenenfalls diese Werte.

a) $\left\{x^2 - x + 2 \,:\, x \in \mathbb{R}\right\}$

b) $\left\{(-1)^n + \frac{1}{n} \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}$

c) $\left\{x + \frac{1}{x} \,:\, 0 < x \leqslant 42\right\}$

d) $\left\{\frac{x^2}{1+x^2} \,:\, x \in \mathbb{R}\right\}$

Aufgabe 3

Die Mengen A und B seien beschränkte, nichtleere Teilmengen von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann auch $A + B := \{a + b \,:\, a \in A \text{ und } b \in B\} = \{x \,:\, \exists a \in A, b \in B : x = a + b\}$ eine beschränkte Menge ist und

$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B \qquad \text{sowie} \qquad \inf(A+B) = \inf A + \inf B$$

gelten.

Aufgabe 4

a) Bestimmen und skizzieren Sie die folgende Teilmenge von $\mathbb{R}^2$:

$$\bigcup_{j=0}^{3} \Big[2j, 2j+1\Big) \times \bigcup_{j=1}^{4} \Big(2(j-1), 2j-1\Big].$$

b) Für jedes $j \in \mathbb{N}$ sei das Intervall $M_j := [-\frac{1}{j}, \frac{1}{j}] \subset \mathbb{R}$ gegeben. Zeigen Sie:

$$\bigcap_{j \in \mathbb{N}} M_j = \{0\}.$$

Aufgabe 5

a) Gegeben seien die Mengen $M_1 = \{2, 4, 7\}$ und $M_2 = \{2, 4, 8, 9\}$. Geben Sie jeweils eine injektive, eine nicht injektive, eine surjektive und eine nicht surjektive Abbildung von M_1 nach M_2 bzw. von M_2 nach M_1 an. Existieren auch bijektive Abbildungen?

b) Es seien X, Y und Z Mengen sowie $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Funktionen. Weiter sei $h := g \circ f$ die Komposition von f und g. Zeigen Sie

- **i)** Sind f und g bijektiv, so ist auch h bijektiv.
- **ii)** Ist h surjektiv und g injektiv, so ist f surjektiv.

Aufgabe 6

Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume von $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ bzw. von $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$?

a) $\left\{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \middle| \, \exists C > 0 \, \forall j \in \mathbb{N} : \; f(j) \leqslant C \right\}$

b) $\left\{ f : [-1, 1] \to \mathbb{R} \;\middle|\; f(0) = 0 \right\}$

c) $\left\{ f : [-1, 1] \to \mathbb{R} \;\middle|\; f \text{ hat mind. eine Nullstelle} \right\}$

d) $\left\{ f : [-1, 1] \to \mathbb{R} \;\middle|\; f \text{ ist surjektiv} \right\}$

Aufgabe 7

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und V_1, V_2 seien Untervektorräume von V. Zeigen Sie:

a) $V_1 \cap V_2$ ist ein Untervektorraum von V.

b) $V_1 \cup V_2$ ist im allgemeinen kein Untervektorraum von V.

c) $V_1 + V_2 := \left\{ v_1 + v_2 \;\middle|\; v_1 \in V_1, v_2 \in V_2 \right\}$ ist ein Untervektorraum von V.