Karlsruhe Institut für Technologie (KIT) WS 2016/17
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos
Dr. S. Wugalter

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 2. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Der Ausdruck $f_1(x) = \frac{1}{x-1}$ ist überall da definiert, wo der Nenner nicht verschwindet, also $D_1 = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Der maximale Definitionsbereich von $f_2(x) = \frac{x+1}{x-1}$ ist ebenfalls $D_2 = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Polynome wie $f_3(x) = x^2 + x + 1$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, also $D_3 = \mathbb{R}$.

Zur Bestimmung der Bildmenge $f_1(D_1)$ von f_1 setzen wir die Abbildung f_1 aus zwei Abbildungen zusammen. Seien

$$s : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad x \mapsto \frac{1}{x} \qquad \text{und} \qquad t_{-1} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad x \mapsto x - 1.$$

Dann sind sowohl s als auch t_{-1} bijektiv [s injektiv: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : x_1 \neq x_2 \Rightarrow 1/x_1 \neq 1/x_2 \Rightarrow s(x_1) \neq s(x_2)$; s surjektiv: Sei $y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Für $x := 1/y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ gilt $s(x) = s(1/y) = y$. t_{-1} injektiv: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{1\} : x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 - 1 \neq x_2 - 1 \Rightarrow t_{-1}(x_1) \neq t_{-1}(x_2)$; t_{-1} surjektiv: Sei $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Für $x := y+1 \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ gilt $t_{-1}(x) = t_{-1}(y+1) = (y+1) - 1 = y$.] Nach Aufgabe 6 b) i) vom 1. Übungsblatt ist $s \circ t_{-1} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bijektiv. ($s \circ t_{-1}$ ist erlaubt, weil $t_{-1}(\mathbb{R} \setminus \{1\}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und s hierauf definiert ist!) Da für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$s \circ t_{-1}(x) = s(t_{-1}(x)) = s(x-1) = \frac{1}{x-1} = f_1(x)$$

gilt, folgt

$$f_1(\mathbb{R} \setminus \{1\}) = (s \circ t_{-1})(\mathbb{R} \setminus \{1\}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Für $f_2(x) = \frac{x+1}{x-1}$ ist folgende Umformung sehr hilfreich

$$f_2(x) = \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1} = 1 + 2 \cdot f_1(x) \qquad \text{für } x \neq 1. \tag{1}$$

Wegen

$$\begin{aligned} y \in f_2(\mathbb{R} \setminus \{1\}) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} : \; y = f_2(x) \overset{(1)}{=} 1 + 2 \cdot f_1(x) \\ &\Leftrightarrow \quad \exists x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} : \; \frac{y-1}{2} = f_1(x) \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{y-1}{2} \in f_1(\mathbb{R} \setminus \{1\}) = \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ &\Leftrightarrow \quad y \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \end{aligned}$$

gilt $f_2(D_2) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Bei $f_3(x) = x^2 + x + 1$ ist eine quadratische Ergänzung günstig:

$$x^2 + x + 1 = x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Der Graph der Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (x + \frac{1}{2})^2$ ist eine nach oben geöffnete Parabel, ihr Bildbereich ist also die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen $\{y \in \mathbb{R} : y \geqslant 0\} = [0, \infty)$. Für die Bildmenge von f_3 erhalten wir

$$f_3(D_3) = \left\{y \in \mathbb{R} : y \geqslant \frac{3}{4}\right\} = \left[\frac{3}{4}, \infty\right).$$

b) Im a)-Teil haben wir bereits gesehen, dass f_1 injektiv ist. Alternativ: f_1 ist injektiv, denn für alle $x, y \in D_1$ mit $x \neq y$ gilt

$$x \neq y \quad \Leftrightarrow \quad x - 1 \neq y - 1 \quad \overset{x,y \neq 1}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{x-1} \neq \frac{1}{y-1} \quad \Leftrightarrow \quad f_1(x) \neq f_2(y).$$

Die Abbildung f_2 ist ebenfalls injektiv. Dies folgt aus der Injektivität von f_1 und (1), denn für alle $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ gilt

$$x \neq y \quad \Leftrightarrow \quad f_1(x) \neq f_1(y) \quad \Leftrightarrow \quad 1 + 2 \cdot f_1(x) \neq 1 + 2 \cdot f_1(y) \quad \Leftrightarrow \quad f_2(x) \neq f_2(y).$$

Wegen $f_3(-1) = 1 = f_3(0)$ ist f_3 nicht injektiv.

Nun zu den Umkehrabbildungen: Eine injektive Abbildung $f : X \to Y$ besitzt keine Umkehrabbildung, wenn die Zielmenge Y echt größer als die Bildmenge $f(X)$ ist. Wir betrachten daher die Abbildung $f : X \to f(X)$ (diese ist automatisch surjektiv!); dies ist eine bijektive Abbildung, welche wir umkehren können. Im folgenden seien also $f_i : D_i \to f_i(D_i)$.

Die Umkehrabbildung von $f_1 = s \circ t_{-1} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist nach Satz 3.6 gegeben durch

$$(f_1)^{-1} = (s \circ t_{-1})^{-1} = (t_{-1})^{-1} \circ s^{-1}.$$

Definieren wir

$$t_1 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad x \mapsto x + 1,$$

so sind die Abbildungen t_{-1} und t_1 einander invers, denn es gilt

$$\begin{aligned} t_1 \circ t_{-1}(x) &= t_1(t_{-1}(x)) = t_1(x-1) = (x-1)+1 = x \qquad &\text{für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \\ t_{-1} \circ t_1(x) &= t_{-1}(t_1(x)) = t_{-1}(x+1) = (x+1)-1 = x \qquad &\text{für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Die Abbildung s ist wegen $s \circ s(x) = s(s(x)) = \frac{1}{1/x} = x$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zu sich selbst invers, d.h. $s^{-1} = s$. Hiermit erhalten wir

$$(f_1)^{-1} = (t_{-1})^{-1} \circ s^{-1} = t_1 \circ s,$$

also

$$(f_1)^{-1} : f_1(D_1) \to D_1, \quad y \mapsto (t_1 \circ s)(y) = t_1(s(y)) = t_1\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y} + 1 = \frac{1+y}{y}.$$

Zur Bestimmung von $(f_2)^{-1}$ lösen wir die Gleichung $f_1(x) = y$ nach x auf (hier sind $x \in D_2 = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y \in f_2(D_2) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$):

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x-1} = y \quad &\Leftrightarrow \quad x + 1 = y(x-1) \quad \Leftrightarrow \quad x(1-y) = -y - 1 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{-y-1}{1-y} = \frac{y+1}{y-1} = f_2(y). \end{aligned}$$

Also ist f_2 ihre eigene Umkehrabbildung: $(f_2)^{-1} = f_2$.

c) Erlaubt sind genau die Kompositionen $f_i \circ f_j$ mit $f_j(D_j) \subset D_i$. Hier sind dies:

$$f_3 \circ f_1, \quad f_3 \circ f_2, \quad f_3 \circ f_3, \quad f_2 \circ f_2, \quad f_1 \circ f_2.$$

Alle anderen sind nicht erlaubt.

Wegen $2 \in f(D_3)$ und $f_1(2) = 1$, aber $1 \notin D_2$ ist $f_2 \circ (f_1 \circ f_3)$ nicht erlaubt.

d) Es ist

$$f_1 \circ f_2 : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_1(f_2(x)) = f_1\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{1}{\frac{x+1}{x-1} - 1} = \frac{1}{\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x-1}} = \frac{1}{\frac{2}{x-1}} = \frac{x-1}{2}.$$

Aufgabe 2

a) Mit quadratischer Ergänzung erkennen wir

$$x^2 - x + 2 = x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geqslant \frac{7}{4}.$$

Wegen $(\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} + 2 = \frac{7}{4} \in \{x^2 - x + 2 : x \in \mathbb{R}\}$ folgt

$$\min\{x^2 - x + 2 : x \in \mathbb{R}\} = \inf\{x^2 - x + 2 : x \in \mathbb{R}\} = \frac{7}{4}.$$

Da $\{x^2 - x + 2 : x \in \mathbb{R}\}$ nach oben unbeschränkt ist, existieren Maximum und Supremum von $\{x^2 - x + 2 : x \in \mathbb{R}\}$ nicht.

b) Wir erkennen sofort, dass $B := \{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ nach oben beschränkt ist. Zur Bestimmung des Supremums, also der kleinsten oberen Schranke, bemerken wir, dass der Ausdruck $(-1)^n + \frac{1}{n}$ für ungerade natürliche Zahlen $\leqslant 0$ ist. Da $(-1)^n = 1$ für gerade $n \in \mathbb{N}$ gilt und $n \mapsto \frac{1}{n}$ fallend ist, folgern wir aus $(-1)^n + \frac{1}{n} \leqslant (-1)^2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$: $\sup B = \max B = \frac{3}{2}$.

Nun zur unteren Schranke. Wir behaupten: $\inf B = -1 \notin B$, d.h. das Minimum von B existiert nicht.

Wir müssen uns zunächst davon überzeugen, dass -1 überhaupt eine untere Schranke von B ist. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt in der Tat

$$(-1)^n + \frac{1}{n} \geqslant (-1)^n \geqslant -1.$$

Nun zeigen wir, dass -1 auch die größte untere Schranke ist. Dazu nehmen wir an, dass es eine größere untere Schranke K gibt, etwa $K = -1 + \varepsilon$ mit einem $\varepsilon > 0$, und führen dies zu einem Widerspruch. Es soll also gelten

$$K \leqslant (-1)^n + \frac{1}{n} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Da dies insbesondere für ungerade n gilt, folgt für alle ungeraden $n \in \mathbb{N}$

$$-1 + \varepsilon \leqslant -1 + \frac{1}{n} \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon \leqslant \frac{1}{n} \quad \Leftrightarrow \quad n \leqslant \frac{1}{\varepsilon}.$$

Dies kann jedoch nicht sein, weil die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen nicht nach oben beschränkt ist. Also ist die Annahme falsch, und es gilt $-1 = \inf B$.

c) Die Menge $C := \{x + \frac{1}{x} : 0 < x \leqslant 42\}$ ist nicht nach oben beschränkt. Wäre nämlich Γ eine obere Schranke von C, so müsste

$$\forall x \in (0, 42] : \quad x + \frac{1}{x} \leqslant \Gamma$$

gelten. Insbesondere könnten wir dann $x = \frac{1}{n} \in (0, 42]$ einsetzen und erhielten: $\frac{1}{n} + n \leqslant \Gamma$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Erst recht hätten wir dann $n \leqslant \Gamma$ für alle $n \in \mathbb{N}$, im Widerspruch dazu, dass $\mathbb{N}$ nicht nach oben beschränkt ist. Somit existieren weder Supremum noch Maximum von C.

Die Menge C ist aber nach unten durch 2 beschränkt, denn für $x > 0$ erhalten wir durch Multiplikation mit x

$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 1 \geqslant 2x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 \geqslant 0$$

und letzteres ist offensichtlich wahr. Zudem gilt $2 \in A$ (man setze $x = 1$). Damit wissen wir: Keine Zahl > 2 kann untere Schranke von C sein. Also ist $\inf C = 2$ und wegen $2 \in C$ folgt auch $\min C = 2$.

d) Wir setzen $D := \{\frac{x^2}{1+x^2} : x \in \mathbb{R}\}$. Offenbar gilt $x^2(1+x^2)^{-1} \geqslant 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Außerdem ist $0 \in D$ (man setze $x = 0$). Damit folgt: Infimum und Minimum von D existieren, und es ist $\inf D = \min D = 0$.

Die Menge D ist nach oben durch 1 beschränkt, denn wegen $1 + x^2 > 0$ gilt

$$\frac{x^2}{1+x^2} \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \leqslant 1 + x^2.$$

Die letzte Ungleichung ist natürlich für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt. Wir zeigen nun, dass 1 sogar die *kleinste* obere Schranke ist. Sei $\Gamma < 1$ beliebig; wir wollen zeigen, dass Γ keine obere Schranke von D ist. Wir müssen also ein $x \in \mathbb{R}$ finden mit

$$\frac{x^2}{1+x^2} > \Gamma.$$

Dies ist äquivalent zu

$$x^2 > \Gamma(1+x^2), \quad \text{also} \quad (1-\Gamma)x^2 > \Gamma, \quad \text{d. h.} \quad x^2 > \frac{\Gamma}{1-\Gamma}$$

und die letzte Ungleichung ist für hinreichend große x offenbar erfüllt.

Aufgabe 3

Zunächst zum Supremum: Da A und B beschränkt, also insbesondere nach oben beschränkt sind, existieren $\alpha := \sup A$ und $\beta := \sup B$. Wir müssen nun zeigen, dass $A + B$ nach oben beschränkt ist und $\sup(A + B) = \alpha + \beta$ gilt. Dazu müssen wir zwei Dinge beweisen: Zum einen, dass $\alpha + \beta$ eine obere Schranke von $A + B$ ist; zum anderen, dass dies auch die *kleinste* obere Schranke ist.
Wählen wir ein beliebiges $x \in A + B$, so gibt es $a \in A$ und $b \in B$ mit $x = a + b$. Da α bzw. β obere Schranken für A bzw. B sind, gilt $a \leqslant \alpha$ und $b \leqslant \beta$. Addieren dieser beiden Gleichungen liefert

$$x = a + b \leqslant \alpha + \beta.$$

Damit wissen wir, dass $\sup(A + B) \leqslant \alpha + \beta$ ist, d. h. $A + B$ ist nach oben beschränkt und $\alpha + \beta$ ist eine obere Schranke.
Aber ist dies auch die *kleinste* obere Schranke? Dies können wir garantieren, wenn wir zeigen: Keine Zahl $< \alpha + \beta$ ist obere Schranke, d. h. zu jeder Zahl $\Gamma < \alpha + \beta$ existiert ein $x \in A + B$ mit $x > \Gamma$. Sei also $\Gamma < \alpha + \beta$ beliebig. Dann ist $\Gamma - \alpha < \beta$ und, da β die *kleinste* obere Schranke von B ist, muss ein $b \in B$ existieren mit $b > \Gamma - \alpha$. Es gilt also $\alpha > \Gamma - b$. Daher existiert wiederum ein $a \in A$ mit $a > \Gamma - b$, d. h. es ist $a + b > \Gamma$, und wegen $a + b \in A + B$ kann damit Γ keine obere Schranke von $A + B$ sein.
Nun zum Infimum: Da A und B nach unten beschränkt sind, folgt genau wie oben, dass auch $A+B$ nach unten beschränkt ist. Aus der Vorlesung kennen wir das folgende Resultat: Sei $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$, M sei beschränkt. Setze $-M := \{-x : x \in M\}$. Dann ist γ genau dann eine untere Schranke von M, wenn $-\gamma$ obere Schranke von $-M$ ist. Hieraus folgt $\inf(M) = -\sup(-M)$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\inf(A+B) &= -\sup\big(-(A+B)\big) = -\sup\big((-A)+(-B)\big) = -\big(\sup(-A)+\sup(-B)\big) \\ &= -\big(-\inf A + (-\inf B)\big) = \inf A + \inf B.\end{aligned}$$

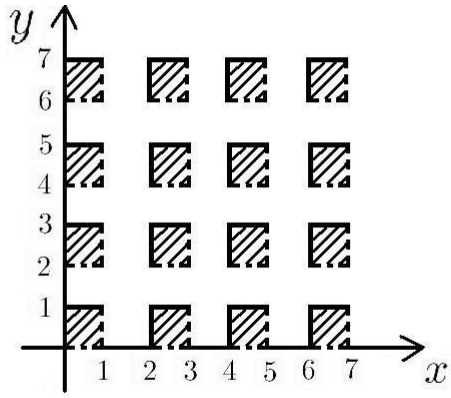
Aufgabe 4

a) Die Menge

$$A := \bigcup_{j=0}^{3} \Big[2j, 2j+1\Big) \times \bigcup_{j=1}^{4} \Big(2(j-1), 2j-1\Big].$$

ist durch die Vereinigung von halboffenen Intervallen und einem kartesischen Produkt gegeben:

$$\begin{aligned}
A &= \big([0,1)\cup[2,3)\cup[4,5)\cup[6,7)\big)\times\big((0,1]\cup(2,3]\cup(4,5]\cup(6,7]\big)\\
&= \big\{(x,y): x\in[0,1)\cup[2,3)\cup[4,5)\cup[6,7) \ \wedge\ y\in(0,1]\cup(2,3]\cup(4,5]\cup(6,7]\big\}\\
&= [0,1)\times(0,1]\cup[0,1)\times(2,3]\cup[0,1)\times(4,5]\cup[0,1)\times(6,7]\\
&\qquad \cup[2,3)\times(0,1]\cup[2,3)\times(2,3]\cup[2,3)\times(4,5]\cup[2,3)\times(6,7]\\
&\qquad \cup[4,5)\times(0,1]\cup[4,5)\times(2,3]\cup[4,5)\times(4,5]\cup[4,5)\times(6,7]\\
&\qquad \cup[6,7)\times(0,1]\cup[6,7)\times(2,3]\cup[6,7)\times(4,5]\cup[6,7)\times(6,7]
\end{aligned}$$



b) Offenbar gilt $\{0\}\subset M_j$ für alle $j\in\mathbb{N}$ und damit auch $\{0\}\subset\bigcap_{j\in\mathbb{N}} M_j$.
Ist andererseits $x\in\bigcap_{j\in\mathbb{N}} M_j$, so bedeutet dies

$$\forall j\in\mathbb{N}: \quad -\frac{1}{j}\leqslant x\leqslant\frac{1}{j}.$$

Angenommen, es wäre $x<0$. Aus $-1/j\leqslant x$ folgt dann durch Multiplikation mit j/x (dies ist eine negative Zahl): $-1/x\geqslant j$ für alle $j\in\mathbb{N}$, im Widerspruch dazu, dass $\mathbb{N}$ nach oben unbeschränkt ist.

Wäre $x>0$, so folgte aus $x\leqslant 1/j$ durch Multiplikation mit j/x, dass $j\leqslant 1/x$ für alle $j\in\mathbb{N}$. Erneut ein Widerspruch dazu, dass $\mathbb{N}$ nach oben nicht beschränkt ist.

Also muss $x=0$ gelten und wir haben auch $\bigcap_{j\in\mathbb{N}} M_j\subset\{0\}$ gezeigt.

Aufgabe 5

a) Eine injektive Abbildung ist beispielsweise gegeben durch $f_1: M_1\to M_2$, $2\mapsto 2, 4\mapsto 4, 7\mapsto 8$. Nicht injektiv ist z.B. $f_2: M_1\to M_2$, $2\mapsto 2, 4\mapsto 2, 7\mapsto 8$. Beide Abbildungen sind nicht surjektiv. Surjektive Abbildungen und damit auch bijektive Abbildungen von M_1 nach M_2 gibt es nicht, weil M_2 mehr Elemente als M_1 enthält.

Aus dem gleichen Grund existiert keine injektive Abbildung $M_2\to M_1$. Ist etwa $g_1: M_2\to M_1$, $2\mapsto 2, 4\mapsto 2, 8\mapsto 2$ und $9\mapsto 7$, so ist g_1 nicht surjektiv. Definiert man z.B. $g_2: M_2\to M_1$, $2\mapsto 2, 4\mapsto 2$, $8\mapsto 4$ und $9\mapsto 7$, dann ist g_2 surjektiv.

b) **i)** Die Funktionen $f: X\to Y$ und $g: Y\to Z$ seien bijektiv, d.h. injektiv und surjektiv.
Um die Bijektivität von $h := g\circ f$ zu zeigen, müssen wir nachweisen, dass h sowohl injektiv als auch surjektiv ist.
Zuerst zeigen wir, dass h injektiv ist, dass also für alle $x_1, x_2\in X$ gilt:

$$\text{Aus } x_1\neq x_2 \text{ folgt } h(x_1)\neq h(x_2).$$

Seien $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ beliebig. Zu zeigen ist $h(x_1) \neq h(x_2)$.
Wegen der Injektivität von f gilt dann $f(x_1) \neq f(x_2)$. Wegen der Injektivität von g folgt daraus aber $g\big(f(x_1)\big) \neq g\big(f(x_2)\big)$, und nach Definition der Komposition bedeutet dies gerade $h(x_1) \neq h(x_2)$.

Jetzt müssen wir noch die Surjektivität von h zeigen; diese folgt aus der Surjektivität von f und g. Zu zeigen ist $h(X) = Z$, also:

$$\text{Zu jedem } z \in Z \text{ existiert ein } x \in X \text{ mit } h(x) = z.$$

Sei dazu $z \in Z$ beliebig. Wir suchen nun ein $x \in X$ mit $h(x) = z$.

Da g surjektiv ist, existiert zu z ein $y \in Y$ mit $g(y) = z$. Da f surjektiv ist, gibt es zu diesem $y \in Y$ ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Es folgt:

$$h(x) = g\big(f(x)\big) = g(y) = z.$$

ii) Es seien $h = g \circ f$ surjektiv und g injektiv. Wir wollen zeigen, dass dann f surjektiv ist.
Sei dazu $y \in Y$ beliebig. Nun müssen wir begründen, warum es $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt.
Wir betrachten $g(y) \in Z$. Da $h : X \to Z$ surjektiv ist, existiert zu $g(y) \in Z$ ein $x \in X$ mit

$$g(y) = h(x) = g\big(f(x)\big).$$

Wegen der Injektivität von g folgt hieraus $y = f(x)$ und damit die Surjektivität von f.

Aufgabe 6

(i) Um zu zeigen, dass $A := \big\{(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\big|\; \exists C > 0 \; \forall j \in \mathbb{N} : \; |x_j| \leqslant C\big\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist, verwenden wir den Satz aus der Vorlesung:

(i) $A \neq \emptyset$ wegen $(0)_{j\in\mathbb{N}} = (0, 0, 0, \ldots) \in A$. (Nehme z.B. $C = 1$)

(ii) Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $(x_j), (y_j) \in A$. Dann gibt es $C, C' > 0$ mit $|x_j| \leqslant C$ und $|y_j| \leqslant C'$ für alle
$j \in \mathbb{N}$. Daher gilt für jedes $j \in \mathbb{N}$

1) $|x_j + y_j| \leqslant |x_j| + |y_j| \leqslant C + C'$, d.h. $(x_j) + (y_j) \in A$;

2) $|\alpha x_j| = |\alpha| \cdot |x_j| \leqslant C|\alpha| \leqslant C|\alpha| + 1 =: \tilde{C}$ (damit $\tilde{C} > 0$), also $\alpha(x_j) \in A$.

(ii) Wie zuvor benutzen wir den Satz aus der Vorlesung, um zu begründen, dass $B := \big\{f : [-1, 1] \to \mathbb{R} \;\big|\; f(0) = 0\big\}$ ein Untervektorraum von $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ ist:

(i) $B \neq \emptyset$, weil die Nullabbildung $f(x) = 0$ für alle $x \in [-1, 1]$ in B liegt.

(ii) Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f, g \in B$. Dann gilt

1) $(f + g)(0) = f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0$, also $f + g \in B$;

2) $(\alpha f)(0) = \alpha \cdot f(0) = \alpha \cdot 0 = 0$, also $\alpha f \in B$.

(iii) $C := \big\{f : [-1, 1] \to \mathbb{R} \;\big|\; f \text{ hat mind. eine Nullstelle}\big\}$ ist kein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{[-1,1]}$, weil z.B. die Funktionen

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \; x \mapsto x \qquad \text{und} \qquad g : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \; x \mapsto 1 - x$$

in C liegen, ihre Summe wegen $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$, jedoch nicht.

(iv) $D := \big\{f : [-1, 1] \to \mathbb{R} \;\big|\; f \text{ ist surjektiv}\big\}$ ist kein Untervektorraum von $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, weil z.B. die Nullfunktion $f(x) = 0$ für alle $x \in [-1, 1]$ nicht in D liegt.
(Wäre D ein Untervektorraum von $\{f : [-1, 1] \to \mathbb{R}\}$, so müsste mit $g \in D$ auch die Nullfunktion $0 \cdot g = 0$ in D liegen!)

Aufgabe 7

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und V_1, V_2 seien Untervektorräume von V.

(i) $V_1 \cap V_2$ ist ein Untervektorraum von V:

(i) $0 \in V_1, 0 \in V_2 \Rightarrow 0 \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$.

(ii) Seien $\alpha \in \mathbb{K}$ und $x, y \in V_1 \cap V_2$, also $x, y \in V_1$ sowie $x, y \in V_2$. Dann gilt

1) $x + y \in V_1$ [da V_1 UVR von V] und $x + y \in V_2$ [da V_2 UVR von V], also $x + y \in V_1 \cap V_2$.

2) $\alpha x \in V_1$ [da V_1 UVR von V] und $\alpha y \in V_2$ [da V_2 UVR von V], also $\alpha x \in V_1 \cap V_2$.

Nun verwende man Satz aus der Vorlesung.

(ii) Gegenbeispiel: Auf dem Vektorraum $V = \mathbb{R}^2$ betrachten wir die durch die Einheitsvektoren $e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ aufgespannten Untervektorräume

$$V_1 := \operatorname{lin}(\{e_1\}) = \{\alpha e_1 : \ \alpha \in \mathbb{R}\} \qquad \text{sowie} \qquad V_2 := \operatorname{lin}(\{e_2\}) = \{\beta e_2 : \ \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Dann ist $V_1 \cup V_2$ nicht abgeschlossen bezüglich der Addition: In $V_1 \cup V_2$ liegen e_1 und e_2, nicht aber der Vektor $e_1 + e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(iii) $V_1 + V_2 := \{v_1 + v_2 : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$ ist ein Untervektorraum von V:

(i) $V_1 + V_2 \neq \emptyset$, denn $0 \in V_1, 0 \in V_2 \Rightarrow 0 = \underbrace{0}_{\in V_1} + \underbrace{0}_{\in V_2} \in V_1 + V_2$.

(ii) Seien $\alpha \in \mathbb{K}$ und $x, y \in V_1 + V_2$. Dann gibt es $x_1, y_1 \in V_1$ sowie $x_2, y_2 \in V_2$ mit $x = x_1 + x_2$ bzw. mit $y = y_1 + y_2$. Es folgt

$$\alpha x + y = \alpha(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = \underbrace{(\alpha x_1 + y_1)}_{\in V_1} + \underbrace{(\alpha x_2 + y_2)}_{\in V_2} \in V_1 + V_2\,.$$

Also gilt $\alpha x + y \in V_1 + V_2$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ und $x, y \in V_1 + V_2$. Insbesondere sind dann $x + y \in V_1 + V_2$ [mit $\alpha = 1$] sowie $\alpha x \in V_1 + V_2$ [mit $y = 0$].

Nun benutze man Satz aus der Vorlesung.