

**Höhere Mathematik I für die Fachrichtung  
 Elektrotechnik und Informationstechnik  
 Lösungsvorschläge zum 3. Übungsblatt**

**Aufgabe 1**

- a) Induktionsanfang (IA): Für  $n = 1$  stimmt die Behauptung, denn beide Seiten der Gleichung ergeben dann 1:  $\sum_{k=1}^1 k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ .

Induktionsschluss (IS): Es sei  $n \in \mathbb{N}$  beliebig. Für dieses  $n$  gelte  $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$  (Induktionsvoraussetzung, kurz: IV). Dann folgt

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^n k + (n+1) \stackrel{\text{IV}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{1}{2}n+1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}.$$

- b) Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = 2 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1 \stackrel{\text{a)}}{=} 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2 + n - n = n^2.$$

- c) IA: Für  $n = 1$  ist  $\prod_{k=1}^1 \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2 = \frac{2^2}{2} = \frac{(1+1)^{1+1}}{(1+1)!}$ .

IS: Sei  $n \in \mathbb{N}$  beliebig. Für dieses  $n$  gelte  $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$  (IV). Dann gilt:

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n+1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k &= \left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \stackrel{\text{IV}}{=} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \left(\frac{n+1}{n+1} + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \\ &= \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+2} = \frac{(n+2)^{n+2}}{(n+2)!} \\ &= \frac{((n+1)+1)^{(n+1)+1}}{((n+1)+1)!}. \end{aligned}$$

- d) IA: Für  $n = 1$  stimmt die behauptete Aussage, denn  $6^1 - 5 \cdot 1 + 4 = 5$  ist durch 5 teilbar.

IS: Sei  $n \in \mathbb{N}$  beliebig. Für dieses  $n$  gelte die Behauptung, sei also  $6^n - 5n + 4$  durch 5 teilbar, etwa  $6^n - 5n + 4 = 5l$  für ein  $l \in \mathbb{Z}$ . (IV)

Zu zeigen ist, dass dann auch  $6^{n+1} - 5(n+1) + 4$  durch 5 teilbar ist. Es gilt:

$$\begin{aligned} 6^{n+1} - 5(n+1) + 4 &= 6 \cdot 6^n - 5n - 5 + 4 = 6(6^n - 5n + 4) + 25n - 25 \\ &\stackrel{\text{IV}}{=} 6 \cdot 5l + 25n - 25 = \underbrace{(6 \cdot l + 5n - 5)}_{\in \mathbb{Z}} \cdot 5. \end{aligned}$$

**Aufgabe 2**

- a) Wir beweisen die behauptete Identität durch vollständige Induktion nach  $n \in \mathbb{N}$ .

IA: Für  $n = 1$  gilt  $\sum_{k=0}^0 q^k = q^0 = 1 = \frac{1-q^1}{1-q}$  für alle  $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ .

IS: Sei  $n \in \mathbb{N}$  beliebig. Für dieses  $n$  gelte  $\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$  für alle  $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ . (IV)

Für jedes  $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$  ergibt sich damit

$$\sum_{k=0}^{(n+1)-1} q^k = \sum_{k=0}^n q^k = \sum_{k=0}^{n-1} q^k + q^n \stackrel{\text{IV}}{=} \frac{1-q^n}{1-q} + q^n \cdot \frac{1-q}{1-q} = \frac{1-q^n + q^n - q^n \cdot q}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

b) Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Sind  $w \neq z$  und  $z \neq 0$ , so setzen wir  $q := \frac{w}{z}$ . Dann ist  $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$  und laut a) gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{w}{z}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{w}{z}\right)^n}{1 - \frac{w}{z}} &\Leftrightarrow \left(1 - \frac{w}{z}\right) \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{w}{z}\right)^k = 1 - \left(\frac{w}{z}\right)^n \\ &\stackrel{|\cdot z^n (\neq 0!)|}{\Leftrightarrow} z \left(1 - \frac{w}{z}\right) z^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} z^{-k} w^k = z^n - w^n \\ &\Leftrightarrow (z-w) \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} w^k = z^n - w^n. \end{aligned}$$

Im Fall  $w = z$  lautet die behauptete Gleichung  $0 = 0$ , diese ist offensichtlich wahr.

Wegen

$$\sum_{k=0}^{n-1} 0^{n-1-k} w^k = \sum_{k=0}^{n-2} \underbrace{0^{n-1-k}}_{=0, \text{ da } n-1-k \geq 1} w^k + 0^{n-1-(n-1)} w^{n-1} = 0^0 w^{n-1} = w^{n-1}$$

ist die Gleichung im Fall  $z = 0$

$$(0-w) \sum_{k=0}^{n-1} 0^{n-1-k} w^k = -w \cdot w^{n-1} = -w^n = 0 - w^n$$

ebenfalls für jedes  $w \in \mathbb{C}$  erfüllt.

c) Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  folgt mit der geometrischen Summenformel

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left(\frac{i}{2}\right)^k &\stackrel{l:=k-1}{=} \sum_{l=0}^{n-1} \left(\frac{i}{2}\right)^{l+1} = \frac{i}{2} \sum_{l=0}^{n-1} \left(\frac{i}{2}\right)^l \stackrel{\text{a)}}{=} \frac{i}{2} \cdot \frac{1 - (i/2)^n}{1 - i/2} \cdot \frac{1 + i/2}{1 + i/2} \\ &= \frac{i}{2} \cdot \frac{1 - (i/2)^n + i/2 - (i/2)^{n+1}}{1 - i^2/4} = \frac{i}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \left(1 - (i/2)^n + i/2 - (i/2)^{n+1}\right) \\ &= \frac{2}{5} i \left(1 + i/2\right) + \frac{2}{5} i \left(- (i/2)^n - (i/2)^{n+1}\right) = \frac{2}{5} i - \frac{1}{5} + \frac{2}{5} i \left(-1 - i/2\right) (i/2)^n \\ &= \frac{2}{5} i - \frac{1}{5} + \left(-\frac{2}{5} i + \frac{1}{5}\right) \frac{i^n}{2^n}. \end{aligned}$$

Nun seien  $m \in \mathbb{N}_0$  und  $r \in \{0, 1, 2, 3\}$  mit  $n = 4m + r$ . Dann gilt

$$i^n = i^{4m+r} = i^{4m} \cdot i^r = (i^4)^m \cdot i^r = 1^m \cdot i^r = i^r$$

und damit

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{i}{2}\right)^k = \frac{2}{5} i - \frac{1}{5} + \left(-\frac{2}{5} i + \frac{1}{5}\right) \frac{i^r}{2^n}.$$

Für  $r = 0$  (also, falls  $n$  durch 4 teilbar ist) gilt

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{i}{2}\right)^k = \frac{2}{5} i - \frac{1}{5} + \left(-\frac{2}{5} i + \frac{1}{5}\right) \frac{1}{2^n} = -\frac{1}{5} + \frac{1}{5 \cdot 2^n} + i \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5 \cdot 2^{n-1}}\right).$$

Für  $r = 1$  (also, falls  $n$  durch 4 mit Rest 1 teilbar ist) gilt

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{i}{2}\right)^k = \frac{2}{5} i - \frac{1}{5} + \left(-\frac{2}{5} i + \frac{1}{5}\right) \frac{i}{2^n} = -\frac{1}{5} + \frac{1}{5 \cdot 2^{n-1}} + i \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5 \cdot 2^n}\right).$$

Für  $r = 2$  (also, falls  $n$  durch 4 mit Rest 2 teilbar ist) gilt

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{i}{2}\right)^k = \frac{2}{5}i - \frac{1}{5} + \left(-\frac{2}{5}i + \frac{1}{5}\right) \frac{-1}{2^n} = -\frac{1}{5} - \frac{1}{5 \cdot 2^n} + i \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5 \cdot 2^{n-1}}\right).$$

Für  $r = 3$  (also, falls  $n$  durch 4 mit Rest 3 teilbar ist) gilt

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{i}{2}\right)^k = \frac{2}{5}i - \frac{1}{5} + \left(-\frac{2}{5}i + \frac{1}{5}\right) \frac{-i}{2^n} = -\frac{1}{5} - \frac{1}{5 \cdot 2^{n-1}} + i \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5 \cdot 2^n}\right).$$

Wir lesen ab:

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{i}{2}\right)^k\right) = \begin{cases} -\frac{1}{5} + \frac{1}{5 \cdot 2^n}, & \text{falls } n \text{ durch 4 teilbar ist} \\ -\frac{1}{5} + \frac{1}{5 \cdot 2^{n-1}}, & \text{falls } n \text{ durch 4 mit Rest 1 teilbar ist} \\ -\frac{1}{5} - \frac{1}{5 \cdot 2^n}, & \text{falls } n \text{ durch 4 mit Rest 2 teilbar ist} \\ -\frac{1}{5} - \frac{1}{5 \cdot 2^{n-1}}, & \text{falls } n \text{ durch 4 mit Rest 3 teilbar ist} \end{cases}$$

$$\operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{i}{2}\right)^k\right) = \begin{cases} \frac{2}{5} - \frac{1}{5 \cdot 2^{n-1}}, & \text{falls } n \text{ durch 4 teilbar ist} \\ \frac{2}{5} + \frac{1}{5 \cdot 2^n}, & \text{falls } n \text{ durch 4 mit Rest 1 teilbar ist} \\ \frac{2}{5} + \frac{1}{5 \cdot 2^{n-1}}, & \text{falls } n \text{ durch 4 mit Rest 2 teilbar ist} \\ \frac{2}{5} - \frac{1}{5 \cdot 2^n}, & \text{falls } n \text{ durch 4 mit Rest 3 teilbar ist} \end{cases}$$

### Aufgabe 3

Es seien  $n \in \mathbb{N}$  sowie  $x, y \in [0, \infty)$ . Für  $x = 0$  ist die behauptete Aussage klar. Für  $x > 0$  ergibt sich

$$x \leq y \Leftrightarrow x - y \leq 0 \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k \leq 0 \stackrel{2b)}{\Leftrightarrow} x^n - y^n \leq 0 \Leftrightarrow x^n \leq y^n.$$

Zur Äquivalenz in (\*): Wegen  $x > 0$  und  $y \geq 0$  ist  $\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k \geq x^{n-1} > 0$ .

### Aufgabe 4

Mit Hilfe von  $\operatorname{Re}(\lambda) = \frac{1}{2}(\lambda + \bar{\lambda})$  (für  $\lambda \in \mathbb{C}$ ) erhalten wir

$$|z + w|^2 = (z + w)\overline{(z + w)} = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = z\bar{z} + z\bar{w} + \underbrace{w\bar{z}}_{=\bar{w}z = \overline{z\bar{w}}} + w\bar{w} = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2.$$

Daraus ergibt sich sofort

$$|z - w|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z(-\bar{w})) + |-w|^2 = |z|^2 - 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2.$$

Addiert man diese Gleichungen, so folgt  $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$ .

Geometrische Bedeutung: In einem Parallelogramm ist die Summe der Quadrate der Diagonallängen gleich der Summe der Quadrate der Seitenlängen.

