Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. I.Anapolitanos
Dr. S.Wugalter

WS 2016/17
11.11.2016

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

4. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil, Betrag und Argument von

$$z_1 = \left(1 - i\sqrt{3}\right)^{42}, \qquad z_2 = \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{201}.$$

b) Es sei $t \in (0, 2\pi)$. Ermitteln Sie die Polarkoordinaten von $z(t) := 1 - e^{it}$.

c) Gegeben sei die komplexe Zahl $z = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$. Berechnen Sie z^3 und z^{150}.

Aufgabe 2

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n \in V$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie jeweils einen Beweis bzw. ein Gegenbeispiel an.

a) Jede Menge M von Vektoren aus V mit $0 \in M$ ist linear abhängig.

b) Ist $M := \{v_1, \ldots, v_n\}$ linear abhängig, so lässt sich jeder Vektor aus M als Linearkombination der anderen Vektoren aus M darstellen.

c) Existiert ein $v \in V$ mit eindeutiger Darstellung als Linearkombination der $v_1, \ldots, v_n$, dann sind $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig.

d) Sind $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig und $v \in V$, dann sind $v_1 + v, v_2 + v, \ldots, v_n + v$ linear unabhängig.

e) Sind v_1, v_2 linear unabhängig und sind v_1, v_3 linear unabhängig, so sind auch v_2, v_3 linear unabhängig.

Aufgabe 3

In einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V seien linear unabhängige Vektoren $v_1, \ldots, v_k$ sowie linear unabhängige Vektoren $v_{k+1}, \ldots, v_m$ gegeben. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

a) $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_m$ sind linear unabhängig.

b) $\operatorname{lin}(v_1, \ldots, v_k) \cap \operatorname{lin}(v_{k+1}, \ldots, v_m) = \{0\}$.

— bitte wenden —

Aufgabe 4

a) Im $\mathbb{R}^4$ sind die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ gegeben. Zeigen Sie:

i) Die Vektoren v_1, v_2 und v_3 sind linear abhängig.

ii) Es gibt keine Zahlen $\alpha_1, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ mit $v_2 = \alpha_1 v_1 + \alpha_3 v_3$.

b) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$ so, dass die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ des $\mathbb{R}^3$ linear abhängig sind.

Aufgabe 5

a) Im $\mathbb{C}^4$ sind die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix}$ gegeben.

Vergleichen Sie die Vektorräume:

$$\mathrm{lin}(v_1, v_2, v_3), \qquad \mathrm{lin}(v_1, v_2), \qquad \mathrm{lin}(v_1, v_3), \qquad \mathrm{lin}(v_2, v_3).$$

b) Seien $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie: $\mathrm{lin}(b_1, b_2, b_3) = \mathbb{R}^3$.

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **1, 2, 3 und 4**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.