Karlsruhe Institut füt Technologie (KIT) WS 2016/17
Institut für Analysis
Dr. I.Anapolitanos
Dr. S. Wugalter

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 4. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Um Real- und Imaginärteil von z_1 zu ermitteln, betrachtet man am besten die Polarkoordinaten von $1-i\sqrt{3}$. Die Länge dieser Zahl beträgt

$$|1-i\sqrt{3}\,| = \sqrt{1^2+(-\sqrt{3}\,)^2} = \sqrt{4} = 2\,,$$

und nun gilt es noch, das Argument von $1-i\sqrt{3}$ zu finden, d.h. $\varphi \in (-\pi,\pi]$ mit

$$1-i\sqrt{3} = 2e^{i\varphi} = 2\big(\cos\varphi + i\sin\varphi\big)\,, \qquad \text{also} \qquad \cos\varphi = \tfrac{1}{2} \quad \text{und} \quad \sin\varphi = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,.$$

Dies ist genau für $\varphi = -\frac{1}{3}\pi$ der Fall; damit ist $1-i\sqrt{3} = 2e^{-i\pi/3}$. Es folgt

$$z_1 = \big(1-i\sqrt{3}\,\big)^{42} = \big(2e^{-i\pi/3}\big)^{42} = 2^{42}e^{42(-i\pi/3)} = 2^{42}e^{-14\pi i} = 2^{42}\,,$$

denn $e^{-14\pi i} = \cos(-14\pi) + i\sin(-14\pi) = 1$. Somit sind $\operatorname{Re} z_1 = 2^{42}$, $\operatorname{Im} z_1 = 0$, $|z_1| = 2^{42}$ und $\arg z_1 = 0$.

Wie zuvor gesehen, ist $1 \pm \sqrt{3}i = 2e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$. Damit erhalten wir

$$z_2 \;=\; \left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}\right)^{201} = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{201} = e^{i\frac{2\pi}{3}\cdot 201} = e^{134\,i\pi} = \cos(134\pi) + i\sin(134\pi) = 1\,.$$

Also sind $\operatorname{Re} z_2 = 1$, $\operatorname{Im} z_2 = 0$, $|z_2| = 1$ und $\arg z_2 = 0$.

b) Es sei $t \in (0,2\pi)$. Wegen $e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = 2i\sin\varphi$ für $\varphi \in \mathbb{R}$ erhalten wir

$$z(t) = 1-e^{it} = \big(e^{-it/2} - e^{it/2}\big)e^{it/2} = -2i\sin(t/2)\,e^{it/2} = 2\sin(t/2)\,e^{i(t-\pi)/2}\,,$$

wobei für die letzte Umformung $-i = e^{-i\pi/2}$ verwendet wurde. Damit haben wir bereits die gesuchte Polardarstellung von $z(t)$ gefunden, denn für alle $t \in (0,2\pi)$ gilt $\sin(t/2) > 0$ und $\frac{1}{2}(t-\pi) \in (-\pi,\pi]$. Also hat $z(t)$ die Länge $2\sin(t/2)$ und das Argument $\frac{1}{2}(t-\pi)$.

c) Wir haben

$$z = e^{i\frac{5\pi}{4}} = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{i}{2}\sqrt{2},$$

$$z^3 = e^{i\frac{15\pi}{4}} = \cos\left(\frac{15\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{15\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{i}{2}\sqrt{2}$$

und

$$z^{150} = e^{i\frac{750\pi}{4}} = \cos\left(\frac{750\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{750\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -i,$$

weil $750 = 93\cdot 8 + 6$ und somit $\frac{750\pi}{4} = 93\cdot 2\pi + \frac{6\pi}{4}$ ist.

Aufgabe 2

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n \in V$.

a) Ist $M \subset V$ mit $0 \in M$, so gilt $\mathrm{lin}(M) = \mathrm{lin}(M \setminus \{0\})$. Daher ist M linear abhängig.

b) Diese Aussage ist falsch. Beispielsweise ist $M = \{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\} \subset \mathbb{R}^2 = V$ linear abhängig, jedoch kann $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ nicht als Linearkombination des Nullvektors $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ dargestellt werden, d.h. es existiert kein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. [Weiteres Gegenbeispiel siehe Aufgabe 5 a)]

c) Existiert ein Vektor $v \in V$ mit eindeutiger Darstellung als Linearkombination der $v_1, v_2, \ldots, v_n$ (d.h. es gibt eindeutige $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ mit $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j$), so wird auch der Nullvektor $0 = v - v$ eindeutig dargestellt. Folglich lässt sich der Nullvektor nur als tiviale Linearkombination der $v_1, v_2, \ldots, v_n$ darstellen. Also sind $v_1, v_2, \ldots, v_n$ linear unabhängig.

d) Diese Aussage ist falsch. Beispielsweise im Vektorraum $V = \mathbb{R}^2$ sind die Vektoren $v_1 := \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $v_2 := \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ linear unabhängig. Wählt man $v := \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$, so sind die Vektoren $v_1 + v = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ und $v_2 + v = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ linear abhängig, denn es gilt $0 \cdot (v_1 + v) + 1 \cdot (v_2 + v) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

e) Diese Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: $V = \mathbb{C}^2$. Dort sind $v_1 := \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $v_2 := \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ linear unabhängig. Außerdem sind v_1 und $v_3 := \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ linear unabhängig. Die Vektoren v_2 und v_3 sind jedoch nicht linear unabhängig, denn es gilt $v_2 - v_3 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

Aufgabe 3

In einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V seien linear unabhängige Vektoren $v_1, \ldots, v_k$ und linear unabhängige Vektoren $v_{k+1}, \ldots, v_m$ gegeben sowie die beiden Aussagen

$$A = \text{“}v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_m \text{ sind linear unabhängig”}$$
$$B = \text{“}\mathrm{lin}(v_1, \ldots, v_k) \cap \mathrm{lin}(v_{k+1}, \ldots, v_m) = \{0\}\text{”}$$

Behauptung: $A \iff B$.

Wir zeigen $A \implies B$ durch Kontraposition, d.h. wir verifizieren $\neg B \implies \neg A$:
Sei also $\mathrm{lin}(v_1, \ldots, v_k) \cap \mathrm{lin}(v_{k+1}, \ldots, v_m) \neq \{0\}$, etwa $0 \neq v \in \mathrm{lin}(v_1, \ldots, v_k) \cap \mathrm{lin}(v_{k+1}, \ldots, v_m)$.
Wir müssen zeigen, dass dann $v_1, \ldots, v_m$ linear abhängig sind.
Wegen $v \in \mathrm{lin}(v_1, \ldots, v_k) \cap \mathrm{lin}(v_{k+1}, \ldots, v_m)$ gilt $v \in \mathrm{lin}(v_1, \ldots, v_k)$ und $v \in \mathrm{lin}(v_{k+1}, \ldots, v_m)$. Daher existieren Skalare $\alpha_j \in \mathbb{K}$ (nicht alle $= 0$, da $v \neq 0$) mit $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = \sum_{j=1}^k \alpha_j v_j$ sowie $\beta_j \in \mathbb{K}$ (nicht alle $= 0$, da $v \neq 0$) mit $v = \beta_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \beta_m v_m = \sum_{j=k+1}^m \beta_j v_j$. Es folgt

$$0 = v - v = \sum_{j=1}^k \alpha_j v_j - \sum_{j=k+1}^m \beta_j v_j = \sum_{j=1}^k \alpha_j v_j + \sum_{j=k+1}^m (-\beta_j) v_j \,.$$

Also ist eine nichttriviale Linearkombination der $v_1, \ldots, v_m$ gefunden, die den Nullvektor darstellt. Somit sind $v_1, \ldots, v_m$ linear abhängig.

Nun zu $B \implies A$. Wir zeigen $\neg A \implies \neg B$:

Seien also $v_1, \dots, v_m$ linear abhängig. Dann gibt es eine nichttriviale Linearkombination des Nullvektors, d.h. es existieren $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_{k+1}, \dots, \beta_m \in \mathbb{K}$ (nicht alle $= 0$) mit

$$0 = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j v_j + \sum_{j=k+1}^{m} \beta_j v_j \,, \qquad \text{bzw.} \qquad \sum_{j=1}^{k} \alpha_j v_j = - \sum_{j=k+1}^{m} \beta_j v_j \,. \tag{$*$}$$

Ist ein α_j ungleich 0, so gilt $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j v_j \neq 0$ [da $v_1, \dots, v_k$ linear unabhängig sind] und wegen $(*)$ auch $\sum_{j=k+1}^{m} \beta_j v_j \neq 0$.
Ist ein β_j ungleich 0, so gilt $\sum_{j=k+1}^{m} \beta_j v_j \neq 0$ [da $v_{k+1}, \dots, v_m$ linear unabhängig sind] und wegen $(*)$ auch $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j v_j \neq 0$.
Zusammen folgt $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j v_j \neq 0$ und $\sum_{j=k+1}^{m} \beta_j v_j \neq 0$. Ist $v := \sum_{j=1}^{k} \alpha_j v_j$ gesetzt, so gilt $0 \neq v \in \operatorname{lin}(v_1, \dots, v_k)$ und

$$v \overset{(*)}{=} \sum_{j=k+1}^{m} (-\beta_j) v_j \in \operatorname{lin}(v_{k+1}, \dots, v_m) \,.$$

Also ist $\operatorname{lin}(v_1, \dots, v_k) \cap \operatorname{lin}(v_{k+1}, \dots, v_m) \neq \{0\}$.

Aufgabe 4

a) Im $\mathbb{R}^4$ sind die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ gegeben.

i) Offenbar ist $v_1 = -2v_3$. Daher gilt $v_1 + 0v_2 + 2v_3 = 0$, d.h. es gibt eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors. Also sind die Vektoren v_1, v_2, v_3 linear abhängig.

Im allgemeinen erkennt man nicht sofort, ob gegebene Vektoren linear unabhängig sind oder nicht. Um die Vektoren v_1, v_2, v_3 auf lineare Unabhängigkeit zu prüfen, können wir v_1, v_2, v_3 als Zeilen in eine Matrix schreiben und diese durch Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform bringen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 8 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

[vertausche erste und zweite Zeile]

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

[multipliziere die dritte Zeile mit 2]

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -2 & 4 \\ 0 & -8 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

[ersetze die dritte Zeile durch die Summe der zweiten und dritten Zeile]

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da die Zeilen der letzten Matrix linear abhängig sind, sind es v_1, v_2, v_3 auch.

ii) Wäre $v_2 = \alpha_1 v_1 + \alpha_3 v_3$ für $\alpha_1, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, so müsste für die erste Komponente gelten: $3 = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 = 0$. Dies ist nicht möglich. Deshalb gibt es keine $\alpha_1, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ mit $v_2 = \alpha_1 v_1 + \alpha_3 v_3$.

b) Seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$, also mit

$$\left\{ \begin{array}{lllll} \alpha_1 & & + \alpha_3 a & = & 0 \\ & \alpha_2 & + \alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_1 & - \alpha_2 & + \alpha_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

bzw. äquivalent hierzu

$$\left\{ \begin{array}{lll} \alpha_1 & = & -a\alpha_3 \\ \alpha_2 & = & -\alpha_3 \\ \alpha_1 & = & -2\alpha_3 \end{array} \right.$$

Nur für $a = 2$ gibt es eine Lösung, die sich von $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ unterscheidet (z.B. $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = -1$, dann gilt $2v_1 + v_2 - v_3 = 0$).

Also sind die Vektoren v_1, v_2, v_3 nur für $a = 2$ linear abhängig.

Aufgabe 5

a) Im $\mathbb{C}^4$ sind die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix}$ gegeben. Wir halten zunächst folgendes fest: Ist V ein beliebiger Vektorraum und gilt $U_1 \subset U_2 \subset V$, so folgt $\operatorname{lin}(U_1) \subset \operatorname{lin}(U_2) \subset V$. Außerdem haben wir $\operatorname{lin}(\operatorname{lin}(U)) = \operatorname{lin}(U)$ für jede Teilmenge $U \subset V$. [Beides folgt unmittelbar aus der Definition des linearen Aufspanns.]

Also ist klar, dass die drei Vektorräume $\operatorname{lin}(v_1, v_2)$, $\operatorname{lin}(v_1, v_3)$ und $\operatorname{lin}(v_2, v_3)$ Teilmengen von $\operatorname{lin}(v_1, v_2, v_3)$ sind. Um zu sehen, ob $\operatorname{lin}(v_1, v_2, v_3)$ tatsächlich größer ist als die anderen Mengen, untersuchen wir nun, ob die Vektoren v_1, v_2, v_3 linear abhängig sind, d. h. wir fragen uns, ob es $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda_1| + |\lambda_2| + |\lambda_3| > 0$ und $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$ gibt. Für solche Zahlen muss wegen der zweiten Komponente der Vektoren $\lambda_3 = -\lambda_1$ gelten. Offenbar ist $v_1 - v_3 = -2v_2$. Die Vektoren v_1, v_2, v_3 sind also in der Tat linear abhängig; es gilt $v_1 + 2v_2 - v_3 = 0$. Folglich haben wir

$$\operatorname{lin}(v_1, v_2, v_3) = \operatorname{lin}(v_1, v_2, v_1 + 2v_2) \subset \operatorname{lin}(\operatorname{lin}(v_1, v_2)) = \operatorname{lin}(v_1, v_2)\,.$$

Völlig analog ergibt sich, dass $\operatorname{lin}(v_1, v_3)$ und $\operatorname{lin}(v_2, v_3)$ Obermengen von $\operatorname{lin}(v_1, v_2, v_3)$ sind. Alle vier zu betrachtenden Vektorräume sind somit identisch.

b) Eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist durch die drei Einheitsvektoren $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3$ gegeben. Um $\operatorname{lin}(b_1, b_2, b_3) = \mathbb{R}^3$ zu zeigen, reicht es zu begründen, dass wir jeden dieser Basisvektoren durch b_1, b_2, b_3 darstellen können: $e_1 = b_3 - b_2$, $e_3 = b_3 - b_1$, $e_2 = b_1 - e_1 = b_1 - (b_3 - b_2) = b_1 - b_3 + b_2$.

Um $\operatorname{lin}(b_1, b_2, b_3) = \mathbb{R}^3$ nachzuweisen, können wir auch zeigen, dass die drei Vektoren b_1, b_2, b_3 des $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig sind. Wegen $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ folgt dann $\operatorname{lin}(b_1, b_2, b_3) = \mathbb{R}^3$.
Wir schreiben b_1, b_2, b_3 als Zeilen in eine Matrix und bringen diese durch Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[ersetze die dritte Zeile durch die Differenz der ersten von der dritten Zeile]

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Somit gilt $n = r = 3$ und die Vektoren b_1, b_2, b_3 sind linear unabhängig.