

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung
Elektrotechnik und Informationstechnik

5. Übungsblatt

Aufgabe 1

- a) Finden Sie Beispiele für Folgen mit den folgenden Eigenschaften:
- i) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hat genau die Zahlen 1 und -1 als Häufungswerte.
 - ii) $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hat jede natürliche Zahl als Häufungswert.
 - iii) $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hat keinen Häufungswert und ist weder nach oben noch nach unten beschränkt.
 - iv) $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen 2008, aber nicht monoton.
 - v) $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hat 0 als einzigen Häufungswert, jedoch konvergiert $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht.
- b) Entscheiden Sie jeweils durch Beweis oder Gegenbeispiel, ob die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt so, dass für alle $n \geq n_0$ gilt:
- i) $|a_n - a_{n+1}| < \varepsilon$; ii) $|a_n| < 2\varepsilon^2$; iii) $|a_n + a_{n+1}| < \varepsilon$; iv) $|a_n a_{n+1}| < \varepsilon$;
 - v) $|a_n a_m| < \varepsilon$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie alle Häufungswerte von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und geben Sie $\liminf_{n \rightarrow \infty}(a_n)$ und $\limsup_{n \rightarrow \infty}(a_n)$ an.

a) $a_n = (1 + (-1)^n)^n$ b) $a_n = \begin{cases} 1 + 1/2^n, & n = 3k \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \\ 2, & n = 3k - 1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \\ 2 + (n + 1)/n, & n = 3k - 2 \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \end{cases}$

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen einen Wert a konvergiert, und geben Sie zu $\varepsilon = 10^{-10}$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ an so, dass für alle $n \geq n_0$ stets $|a_n - a| < \varepsilon$ gilt:

a) $a_n = \frac{2n}{n+1}$; b) $a_n = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{n+1}+1}}$.

Aufgabe 4

Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

a) $a_n = \frac{n^2 + 3n - 4}{1 + n^2 + 4n^3}$ b) $a_n = (-1)^n + 1/n$

c) $a_n = \sqrt{9n^2 + 2n + 1} - 3n$ d) $a_n = \frac{(1+n)^{42} - n^{42}}{n^{41}}$

e) $a_n = n^4 \left(\sqrt[10]{1 + 3n^{-4} + n^{-9}} - 1 \right)$ f) $a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n}$

Aufgabe 5

- a) Es seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge. Konvergiert die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $c_n := a_n \cdot b_n$? Begründen Sie Ihre Antwort.
- b) Nun seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Konvergiert die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $c_n := a_n \cdot b_n$? Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 6

- a) Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge. Zeigen Sie, dass dann jede Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert und zwar gegen den selben Grenzwert.
- b) Beweisen Sie: Besitzt eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine divergente Teilfolge, so divergiert $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- c) Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitze die konvergenten Teilfolgen $(a_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ und $(a_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$. Folgt hieraus die Konvergenz von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$? Begründen Sie Ihre Antwort.
- d) Zeigen Sie, dass eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ genau dann konvergiert, wenn die drei Teilfolgen $(a_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(a_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ und $(a_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergieren.

Aufgabe 7

Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_1 := \sqrt{2}, \quad a_{n+1} := \sqrt{2 + a_n} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Konvergiert die Folge? Bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **3,4, 6,und 7**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt. Die mit **(P)** gekennzeichneten Aufgaben beziehen sich auf den Stoff aus den Ergänzungen zur HM I für Studierende der Physik.