

**Höhere Mathematik I für die Fachrichtung
Elektrotechnik und Informationstechnik
Lösungsvorschläge zum 5. Übungsblatt**

Aufgabe 1

- a) Etwa folgende Folgen erfüllen das Verlangte:
- i) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$
 - ii) $(b_n) = (1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1, \dots)$
 - iii) $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $c_n = (-1)^n n$ für alle $n \in \mathbb{N}$
 - iv) $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $d_n = 2008 + \frac{(-1)^n}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$
 - v) $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $e_n = 0$ für gerade n und $e_n = n$ für ungerade n .
- b) i) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ gilt. Die Folge $(a_n) = (\sqrt{n})$ erfüllt also die Voraussetzung. Allerdings ist (a_n) divergent. Die harmonische Reihe wäre ein weiteres Gegenbeispiel.
- ii) Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt $\varepsilon = 2\delta^2$ für $\delta := \sqrt{\varepsilon/2} > 0$. Nach Voraussetzung existiert ein n_0 so, dass für $n \geq n_0$ stets $|a_n| < 2\delta^2 = \varepsilon$ ist. Die Folge konvergiert also gegen Null.
- iii) Etwa $(a_n) = ((-1)^n)$ erfüllt $|a_n + a_{n+1}| = 0 < \varepsilon$ sogar für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge (a_n) ist jedoch divergent.
- iv) Die Folge (a_n) mit $a_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$ erfüllt sicher $|a_n \cdot a_{n+1}| = 0 < \varepsilon$, ist aber divergent.
- v) In diesem Fall ist (a_n) konvergent mit Grenzwert Null. Wäre (a_n) keine Nullfolge, so gäbe es zu vorgegebenem ε eine Teilfolge $(a_{k(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, für welche stets $|a_{k(n)}| \geq \sqrt{\varepsilon}$ wäre. Dann wäre aber stets $|a_{k(n)}^2| \geq \sqrt{\varepsilon}^2 = \varepsilon$ im Widerspruch zur Voraussetzung!

Aufgabe 2

- a) Offenbar gilt

$$a_{2n} = (1 + (-1)^{2n})^{2n} = (1 + 1)^{2n} = 2^{2n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Also ist (a_n) nicht nach oben beschränkt, daher ergibt sich $\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \infty$. Weiter gilt

$$a_{2n+1} = (1 + (-1)^{2n+1})^{2n+1} = (1 - 1)^{2n+1} = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Damit ist 0 ein Häufungswert der Folge. Weitere Häufungswerte gibt es nicht, denn zu jedem anderen Punkt kann man eine so kleine Umgebung wählen, dass nur endlich viele Folgenglieder a_n in ihr liegen. Somit ist $\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 0$.

- b) Wegen $1 + 1/2^n \rightarrow 1$ und $2 + (n+1)/n = 2 + 1 + 1/n \rightarrow 3$ für $n \rightarrow \infty$ ergeben sich hier die drei Häufungswerte 1, 2 und 3. Damit gilt $\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 1$ und $\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 3$.

Aufgabe 3

- a) Wegen $a_n = \frac{2n}{n+1} = \frac{2}{1+\frac{1}{n}}$ konvergiert (a_n) für $n \rightarrow \infty$ gegen 2.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$|a_n - 2| = \left| \frac{2n - 2(n+1)}{n+1} \right| = \frac{2}{n+1}.$$

Daher ergibt sich

$$|a_n - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{2}{\varepsilon} - 1.$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{2}{\varepsilon} - 1$. Wie eben gesehen, gilt dann $|a_n - 2| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Also konvergiert (a_n) gegen 2.

Ist $\varepsilon = 10^{-10}$, so kann man beispielsweise $n_0 = 2 \cdot 10^{10} > 2 \cdot 10^{10} - 1$ nehmen. Damit gilt $|a_n - 2| < 10^{-10}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2 \cdot 10^{10}$.

- b) Die Folge (a_n) ist eine Nullfolge: Es gilt $|a_n| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $\varepsilon \in (0, 1)$ ist

$$|a_n| = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{n+1}+1}} < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{\sqrt{n+1}+1} > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \sqrt{n+1} > \frac{1}{\varepsilon^2} - 1 \Leftrightarrow n > \left(\frac{1}{\varepsilon^2} - 1\right)^2 - 1.$$

Hieraus folgt: Wählt man zu einem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \left(\frac{1}{\varepsilon^2} - 1\right)^2 - 1$, dann gilt $|a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$, d.h. (a_n) konvergiert gegen 0.

Etwa für $n_0 = 10^{40}$ ist $|a_n - 0| < 10^{-10}$ für alle $n \geq 10^{40}$ erfüllt.

Aufgabe 4

- a) Diese Folge ist konvergent, denn es gilt

$$\frac{n^2 + 3n - 4}{1 + n^2 + 4n^3} = \frac{1/n + 3/n^2 - 4/n^3}{1/n^3 + 1/n + 4} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{0 + 0 - 0}{0 + 0 + 4} = 0.$$

- b) Wegen $a_{2n} = 1 + \frac{1}{2n} \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$) und $a_{2n+1} = -1 + \frac{1}{2n+1} \rightarrow -1$ ($n \rightarrow \infty$) besitzt die Folge (a_n) die zwei Häufungswerte 1 und -1 . Daher ist (a_n) divergent.

- c) Wegen $(u-v)(u+v) = u^2 - v^2$, also $u-v = (u^2 - v^2)/(u+v)$ für $u+v \neq 0$, ergibt sich

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{9n^2 + 2n + 1} - 3n = \frac{9n^2 + 2n + 1 - 9n^2}{\sqrt{9n^2 + 2n + 1} + 3n} = \frac{2n + 1}{\sqrt{9n^2 + 2n + 1} + 3n} \\ &= \frac{2 + 1/n}{\sqrt{9 + 2/n + 1/n^2} + 3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{9 + 3}} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

- d) Der binomische Satz liefert für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$(1+n)^{42} = \sum_{k=0}^{42} \binom{42}{k} n^k = \alpha_0 + \alpha_1 n + \dots + \alpha_{42} n^{42}, \quad \text{wobei } \alpha_k := \binom{42}{k}.$$

Wegen $\alpha_{42} = \binom{42}{42} = 1$ ergibt sich $(1+n)^{42} - n^{42} = \alpha_0 + \alpha_1 n + \dots + \alpha_{41} n^{41}$. Folglich ist

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\alpha_0 + \alpha_1 n + \dots + \alpha_{40} n^{40} + \alpha_{41} n^{41}}{n^{41}} \\ &= \frac{\alpha_0}{n^{41}} + \frac{\alpha_1}{n^{40}} + \dots + \frac{\alpha_{40}}{n} + \alpha_{41} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha_{41} = \binom{42}{41} = \binom{42}{1} = 42. \end{aligned}$$

e) Wir verwenden die geometrische Summenformel 4.11 (1)

$$u^m - v^m = (u - v) \sum_{k=0}^{m-1} u^{m-1-k} v^k = (u - v)(u^{m-1} + u^{m-2}v + \dots + uv^{m-2} + v^{m-1}) \quad (*)$$

für $m = 10$. Setzen wir $b_n := \sqrt[10]{1 + 3n^{-4} + n^{-9}}$, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = n^4(b_n - 1) \stackrel{(*)}{=} n^4 \cdot \frac{b_n^{10} - 1^{10}}{b_n^9 + b_n^8 + \dots + b_n + 1} = \frac{n^4(3n^{-4} + n^{-9})}{b_n^9 + b_n^8 + \dots + b_n + 1} = \frac{3 + n^{-5}}{b_n^9 + b_n^8 + \dots + b_n + 1}.$$

Wegen $b_n \rightarrow 1$ folgt $a_n \rightarrow \frac{3}{10}$ ($n \rightarrow \infty$).

f) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$3 = \sqrt[3]{3^n} \leq a_n \leq \sqrt[3]{3^n + 3^n} = \sqrt[3]{2 \cdot 3^n} = 3 \cdot \sqrt[3]{2}.$$

Wegen $\sqrt[3]{2} \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$) folgt mit 6.3 (4): $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$.

Aufgabe 5

a) Es seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1)_{n \in \mathbb{N}}$.

Dann ist (a_n) beschränkt und (b_n) konvergent. Jedoch konvergiert die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $c_n := a_n \cdot b_n = (-1)^n$ nicht.

b) Nun seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Behauptet wird, dass die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $c_n := a_n \cdot b_n$ gegen 0 konvergiert.

Da (a_n) beschränkt ist, existiert eine Konstante $K > 0$ so, dass $|a_n| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Deshalb ergibt sich für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$|c_n| = |a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq K|b_n|.$$

Wegen $b_n \rightarrow 0$ konvergiert nach 6.3 (2) $|b_n| \rightarrow 0$ und nach 6.3 (5) auch $K|b_n| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Mit 6.3 (1) folgt $c_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

Aufgabe 6

a) Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =: a$ und $(a_{k(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge von (a_n) . Wir zeigen, dass $(a_{k(n)})$ konvergiert und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{k(n)} = a$ gilt.

Sei $\varepsilon > 0$.

Wegen $a_n \rightarrow a$ für $n \rightarrow \infty$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$. Wegen $k(n) < k(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $k(N) \geq n_0$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ ist dann $k(n) \geq k(N) \geq n_0$. Demzufolge gilt $|a_{k(n)} - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$, d.h. $(a_{k(n)})$ konvergiert gegen a .

b) Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitze eine divergente Teilfolge $(a_{k(n)})_{n \in \mathbb{N}}$. Zu zeigen ist, dass dann auch (a_n) divergent ist.

Wir führen einen Beweis durch Widerspruch. Annahme: (a_n) konvergiert.

Dann konvergiert laut a) jede Teilfolge von (a_n) . Dies ist jedoch nicht möglich, weil vorausgesetzt wurde, dass (a_n) eine divergente Teilfolge besitzt. Also ist die Annahme falsch, d.h. die Folge (a_n) divergiert.

c) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge. Im allgemeinen folgt aus der Konvergenz von (a_{2n}) und (a_{2n+1}) nicht die Konvergenz von (a_n) .

Ist etwa die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegeben durch $a_n = (-1)^n$. Dann konvergieren die beiden Teilfolgen (a_{2n}) und (a_{2n+1}) für $n \rightarrow \infty$. Jedoch ist (a_n) divergent.

d) Sei (a_n) eine Folge. Behauptung:

$$(a_n) \text{ konvergiert} \iff (a_{2n}), (a_{2n+1}) \text{ und } (a_{3n}) \text{ konvergieren.}$$

“ \Rightarrow ”: Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiere. Gemäß a) konvergiert dann auch jede Teilfolge von (a_n) . Insbesondere sind die drei Teilfolgen (a_{2n}) , (a_{2n+1}) und (a_{3n}) konvergent.

“ \Leftarrow ”: Nun ist die Konvergenz der drei Teilfolgen $(a_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(a_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ und $(a_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$ vorausgesetzt. Zu zeigen: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert.

Wir setzen $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} =: a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} =: b$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{3n} =: c$ und wollen zuerst $a = b = c$ zeigen.

Da (a_{6n}) Teilfolge von (a_{2n}) ist und (a_{2n}) konvergiert, konvergiert (a_{6n}) gegen $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = a$.

Da (a_{6n}) Teilfolge von (a_{3n}) ist und (a_{3n}) konvergiert, konvergiert (a_{6n}) gegen $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{3n} = c$.

Hieraus folgt aufgrund der Eindeutigkeit des Grenzwerts $a = c$.

Durch Betrachtung von (a_{6n+3}) ergibt sich analog $b = c$.

Wir wollen nun zeigen, dass (a_n) gegen a konvergiert. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Wegen $a_{2n} \rightarrow a$ für $n \rightarrow \infty$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_{2n} - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0,$$

woraus

$$|a_m - a| < \varepsilon \quad \text{für alle geraden } m \geq 2n_0$$

folgt. Wegen $a_{2n+1} \rightarrow b = a$ gibt es ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_{2n+1} - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_1,$$

woraus

$$|a_m - a| < \varepsilon \quad \text{für alle ungeraden } m \geq 2n_1 + 1$$

folgt. Demnach gilt für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq \max\{2n_0, 2n_1 + 1\}$

$$|a_m - a| < \varepsilon,$$

d.h. (a_n) konvergiert und zwar gegen a .

Aufgabe 7

Die Folge (a_n) sei durch die Rekursionsvorschrift

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

gegeben. (Offenbar sind alle $a_n \geq 0$; also kann man die Wurzel ziehen.)

1. Beh.: Die Folge (a_n) ist monoton wachsend, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt $a_n \geq a_{n-1}$.

Induktionsanfang: Für $n = 2$ gilt $a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \geq \sqrt{2} = a_1$.

Induktionsschluss: Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Für dieses n gelte $a_n \geq a_{n-1}$ (IV). Dann folgt

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \stackrel{\text{IV}}{\geq} \sqrt{2 + a_{n-1}} = a_n.$$

2. Beh.: Die Folge (a_n) ist nach oben durch 2 beschränkt, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \leq 2$.

Induktionsanfang: Es gilt $a_1 = \sqrt{2} \leq 2$.

Induktionsschluss: Sei $n \in \mathbb{N}$. Für dieses n gelte $a_n \leq 2$ (IV). Dann folgt

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \stackrel{\text{IV}}{\leq} \sqrt{2 + 2} = 2.$$

Da (a_n) monoton wachsend und nach oben beschränkt ist, konvergiert (a_n) gegen einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$. Da die Folge (a_{n+1}) eine Teilfolge von (a_n) ist, gilt nach Teil a): $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = a$. Durch den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ in der Rekursionsformel ergibt sich für a die Gleichung

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2 + a_n} = \sqrt{2 + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \sqrt{2 + a}.$$

Quadrieren liefert $a^2 = 2 + a$ bzw. $0 = a^2 - a - 2 = (a - 2)(a + 1)$, also $a = 2$ oder $a = -1$. Wegen $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $a \geq 0$ (vgl. 6.3 (3)). Daher ist $a = 2$ der Grenzwert von (a_n) .