Karlsruhe Institut für Technologie (KIT) WS 2016/17
Institut für Analysis
Dr. I.Anapolitanos
Dr. S. Wugalter

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 6. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Für $n \in \mathbb{N}$ setze $a_n := \frac{(-2)^{3n-1}}{3^{2n+1}}$. Wegen

$$a_n = \frac{(-2)^{3n-1}}{3^{2n+1}} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{(-2)^{3n}}{3^{2n}} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{((-2)^3)^n}{(3^2)^n} = -\frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{8}{9}\right)^n$$

gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{8}{9} \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{6}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{8}{9} < 1.$$

Nach dem Wurzelkriterium konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ihr Wert ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\frac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{8}{9}\right)^n = -\frac{1}{6}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{8}{9}\right)^n - 1\right] \overset{\text{geom. Reihe}}{=} -\frac{1}{6}\left[\frac{1}{1-(-8/9)} - 1\right] = \frac{4}{51}.$$

b) Nach dem binomischen Satz gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+k} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(1 + \frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Wir haben also eine geometrische Reihe vor uns; wegen $|\frac{3}{4}| < 1$ ist sie konvergent und hat den Wert

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 4\,.$$

c) Für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{N} \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) = \frac{1}{0!} - \frac{1}{(N+1)!} \xrightarrow{N\to\infty} 1\,.$$

Folglich konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ und hat den Wert 1.

Aufgabe 2

a) Die Bernoullische Ungleichung liefert $2^n = (1+1)^n \geqslant 1 + n \geqslant n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d. h. es ist stets $\sqrt[n]{n} \leqslant 2$. Somit ergibt sich für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left|\frac{\sqrt[n]{n}}{n!}\right| \leqslant \frac{2}{n!} =: b_n\,.$$

Bekanntlich konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ (mit Reihenwert e), also ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent, und die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n!}$ folgt mit dem Majorantenkriterium.

b) Für $n \geqslant 3$ ist der Nenner positiv und es gilt

$$\frac{n+4}{n^2-3n+1} \geqslant \frac{n+0}{n^2+0} = \frac{1}{n} \geqslant 0\,.$$

Aus der Divergenz der harmonischen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ folgt mit dem Minorantenkriterium die Divergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^2-3n+1}$.

c) Für $n \geqslant 3$ gilt $\frac{1}{2}+\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{2}+\frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ und daher $(\frac{1}{2}+\frac{1}{n})^n \leqslant (\frac{5}{6})^n$. Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{5}{6})^n$ ist also eine konvergente Majorante von $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2}+\frac{1}{n})^n$. Nach dem Majorantenkriterium ist $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2}+\frac{1}{n})^n$ absolut konvergent.

d) Ist $a_n := \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ gesetzt, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2}\right| = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{(1+1/n)^2}{(2+2/n)(2+1/n)}.$$

Also ist $\limsup_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{(1+0)^2}{(2+0)(2+0)} = \frac{1}{4} < 1$. Das Quotientenkriterium liefert, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert.

e) Für $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir $a_n := \frac{(-1)^n}{3n+(-1)^n} = (-1)^n b_n$ mit $b_n := \frac{1}{3n+(-1)^n}$. Die Folge (b_n) konvergiert gegen 0. Ferner ist (b_n) monoton fallend, denn für alle $n \geqslant 1$ gilt

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} \geqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3(n+1)+(-1)^{n+1}}{3n+(-1)^n} \geqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3 \geqslant (-1)^n - (-1)^{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad 3 \geqslant 2(-1)^n.$$

Nach dem Leibnizkriterium konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Wegen

$$|a_n| = \frac{1}{3n+(-1)^n} \geqslant \frac{1}{3n+n} = \frac{1}{4n}$$

und der Divergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n}$ eine divergente Minorante für $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Deshalb ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nicht absolut konvergent.

f) Wegen $i^4 = (-1)^2 = 1$ gilt für alle $m \in \mathbb{N}$

$$i^{4m-3} = i, \qquad i^{4m-2} = -1, \qquad i^{4m-1} = -i, \qquad i^{4m} = 1.$$

Folglich erhalten wir für jedes $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{4N} \frac{i^n}{n} &= \sum_{m=1}^{N} \left(\frac{i^{4m-3}}{4m-3} + \frac{i^{4m-2}}{4m-2} + \frac{i^{4m-1}}{4m-1} + \frac{i^{4m}}{4m}\right) \\
&= i \sum_{m=1}^{N} \left(\frac{1}{4m-3} - \frac{1}{4m-1}\right) + \sum_{m=1}^{N} \left(\frac{1}{4m} - \frac{1}{4m-2}\right) \\
&= i\left(\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + - \ldots + \tfrac{1}{4N-3} - \tfrac{1}{4N-1}\right) + \left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{6} + - \ldots + \tfrac{1}{4N} - \tfrac{1}{4N-2}\right) \\
&= i \sum_{k=1}^{2N} (-1)^{k+1} \frac{1}{2k-1} + \sum_{k=1}^{2N} (-1)^k \frac{1}{2k}.
\end{aligned}$$

Nach dem Leibnizkriterium konvergieren diese Summen für $N \to \infty$. Damit wissen wir: Wenn wir mit s_N die N-te Partialsumme der zu untersuchenden Reihe bezeichnen, dann konvergiert s_{4N} für $N \to \infty$. Für $m \in \{1,2,3\}$ gilt

$$s_{4N+m} = s_{4N} + \sum_{n=4N+1}^{4N+m} \frac{i^n}{n} \xrightarrow{N\to\infty} \lim_{N\to\infty} s_{4N}$$

wegen $|i^n/n| = 1/n$. Folglich konvergiert s_N für $N \to \infty$, d.h. die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$ konvergiert. Sie ist aber nicht absolut konvergent, weil die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{i^n}{n}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert.

Aufgabe 3

a) Offenbar ist $a_1 = 2 > 0$. Für $n > 1$ gilt wegen $n > \sqrt{n}$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} > \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0.$$

Die Konvergenz von (a_n) gegen 0 ist klar wegen $1/\sqrt{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ und $1/n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

b) Für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$s_N := \sum_{n=1}^{N} (-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{-1}{n} \right) = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}.$$

Die erste Summe ist die N-te Partialsumme der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, die nach dem Leibnizkriterium konvergiert; insbesondere ist die Folge ihrer Partialsummen $\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)_{N\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt, d. h. es gibt eine Konstante C mit $\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \leqslant C$ für alle $N \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$s_N \leqslant C - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \qquad \text{für jedes } N \in \mathbb{N}.$$

Aufgrund von $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \to \infty$ für $N \to \infty$ folgt hieraus $s_N \xrightarrow{N\to\infty} -\infty$, d.h. die gegebene Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ ist tatsächlich divergent.

c) Das Leibnizkriterium ist nicht anwendbar, weil die Folge (a_n) nicht monoton ist.

d) Zunächst zum Quotientenkriterium: Für ungerades $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(1+\frac{1}{2})^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{(1-\frac{1}{2})^n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{(\frac{3}{2})^{n+1}}{(\frac{1}{2})^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2} \cdot \frac{3^{n+1}}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \infty.$$

Für gerades $n \in \mathbb{N}$ dagegen ergibt sich

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(1-\frac{1}{2})^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{(1+\frac{1}{2})^n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{(\frac{1}{2})^{n+1}}{(\frac{3}{2})^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Es gilt also $\limsup(b_{n+1}/b_n) = \infty > 1$ und $\liminf(b_{n+1}/b_n) = 0 < 1$. Das Quotientenkriterium liefert somit keine Entscheidung.

Das Wurzelkriterium kann dennoch eine Entscheidung bringen, und so ist es in diesem Falle tatsächlich. Für gerades $n \in \mathbb{N}$ gilt nämlich

$$\sqrt[n]{|b_n|} = \frac{1+\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{n^2}} = \frac{\frac{3}{2}}{(\sqrt[n]{n})^2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{3}{2},$$

d. h. es gilt $\limsup \sqrt[n]{|b_n|} \geqslant \frac{3}{2} > 1$, und dies impliziert die Divergenz der Reihe.

Aufgabe 4

Mittels Zeilenumformungen bringen wir A auf Zeilennormalform; die Zeilen werden dabei jeweils mit Z_1, Z_2 und Z_3 bezeichnet:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{tauschen}]{\text{Zeilen}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 \to -\frac{1}{2} Z_2]{Z_1 \to -\frac{1}{2} Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_3 \to Z_3 - 4Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -6 & 6 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 + 6Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_3 \to -\frac{1}{3} Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 \to Z_2 + 2Z_3]{Z_1 \to Z_1 + \frac{7}{2} Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In der Zeilennormalform von A gibt es drei nichtverschwindende Zeilen, also hat A Rang 3.
Nun zur Matrix B:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_1 \leftrightarrow Z_3]{Z_3 \to \frac{1}{2} Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(j=2,3,4)]{Z_j \to Z_j - Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & \alpha - 2 & \beta - 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 \to -\frac{1}{2} Z_2]{Z_3 \to Z_3 - 2Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & \alpha - 2 & \beta - 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[Z_3 \to \frac{1}{2} Z_3]{Z_4 \to Z_4 + Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - 10 & \beta - 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1 \to Z_1 - Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - 10 & \beta - 4 \end{pmatrix} =: \widetilde{B}$$

Fall 1: $\alpha = 10$ und $\beta = 4$. In diesem Fall steht die Zeilennormalform von B bereits da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da hier genau 3 nichtverschwindende Zeilen existieren, hat B in diesem Fall Rang 3.
Fall 2: $\alpha = 10$ und $\beta \neq 4$. Dann erhalten wir

$$\widetilde{B} \xrightarrow{Z_4 \to (\beta - 4)^{-1} Z_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 + Z_4]{Z_1 \to Z_1 - 3Z_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und lesen ab: In diesem Fall hat B Rang 4.
Fall 3: $\alpha \neq 10$. Dann setzen wir $\delta := (\beta - 4)/(\alpha - 10)$ und erhalten

$$\widetilde{B} \xrightarrow{Z_4 \to (\alpha - 10)^{-1} Z_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \delta \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 + 4Z_4]{Z_1 \to Z_1 - 6Z_4,\ Z_2 \to Z_2 + Z_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 - 6\delta \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 + 4\delta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \delta \end{pmatrix}$$

Die Matrix B besitzt somit auch in diesem Fall Rang 4.