

**Höhere Mathematik I für die Fachrichtung
 Elektrotechnik und Informationstechnik
 Lösungsvorschläge zum 7. Übungsblatt**

Aufgabe 1

Zu $n \in \mathbb{N}_0$ definiere $a_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ sowie $b_n := \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$ konvergiert nach dem Leibnizkriterium, weil (b_n) eine monoton fallende Nullfolge ist.

Für das Cauchyprodukt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit sich selbst gilt

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_{n-k} a_k = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} \cdot \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} = (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{n-k+1} \cdot \sqrt{k+1}}.$$

Mit

$$0 \leq (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{a}\sqrt{b} \leq \frac{1}{2}(a+b) \quad (\text{für } a, b > 0)$$

folgt

$$\begin{aligned} |c_n| &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{n-k+1} \cdot \sqrt{k+1}} \geq \sum_{k=0}^n \frac{1}{\frac{1}{2}(n-k+1+k+1)} = \sum_{k=0}^n \frac{2}{n+2} \\ &= \frac{2}{n+2} \sum_{k=0}^n 1 = \frac{2(n+1)}{n+2} = \frac{2+2/n}{1+2/n} \rightarrow 2 \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Demnach ist (c_n) keine Nullfolge und damit $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ divergent.

Aufgabe 2

a) Die Reihe lässt sich als Differenz zweier Potenzreihen darstellen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{(n+1)!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1-2}{(n+1)!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n+1)!} z^n.$$

Die erste Reihe ergibt $E(z)$, die zweite liefert für $z = 0$ den Wert 2 und für $z \neq 0$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n+1)!} z^n = \frac{2}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} z^{n+1} = \frac{2}{z} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \frac{2}{z} (E(z) - 1).$$

Insgesamt folgt: Die von $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{(n+1)!} z^n$ dargestellte Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist gegeben durch

$$f(0) = E(0) - 2 = -1, \quad f(z) = E(z) - \frac{2E(z) - 2}{z} = \frac{(z-2)E(z) + 2}{z} \quad (z \neq 0).$$

b) Hier ergibt sich gemäß der Reihendarstellung der Sinus-Funktion für jedes $z \in \mathbb{C}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (z+1)^{2n+2} = (z+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (z+1)^{2n+1} = (z+1) \sin(z+1).$$

Aufgabe 3

- a) Für $a_n := (2n + 1)/(n - 1)^2$ gilt

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{2n + 1}{(n - 1)^2} \cdot \frac{n^2}{2n + 3} = \frac{2 + 1/n}{(1 - 1/n)^2} \cdot \frac{1}{2 + 3/n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{2} = 1.$$

Die Reihe hat daher den Konvergenzradius 1. Wir müssen nun noch die Ränder des Konvergenzintervalls, also $x = -1$ und $x = 1$, untersuchen. Dies liefert die zwei Reihen

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n + 1}{(n - 1)^2} (-1)^n \quad \text{und} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n + 1}{(n - 1)^2}.$$

Die Konvergenz der ersten Reihe wird durch das Leibnizkriterium garantiert, denn

$$a_n = \frac{2n + 1}{(n - 1)^2} = \frac{2(n - 1) + 3}{(n - 1)^2} = \frac{2}{n - 1} + \frac{3}{(n - 1)^2} \geq \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} = \frac{2n + 3}{n^2} = a_{n+1}.$$

Die zweite Reihe hingegen divergiert wegen $a_n \geq 2n/n^2 = 2/n$ und des Minorantenkriteriums. Insgesamt: Die Reihe konvergiert nur für $x \in [-1, 1)$.

- b) Wegen $\sqrt[n]{|1/n^n|} = 1/n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ hat diese Reihe den Konvergenzradius ∞ , d. h. sie konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$.

- c) Die Reihe hat die Form $\sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k$ mit $a_{2n} = e^{n(1+(-1)^n)}$ und $a_{2n+1} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit ist

$$\sqrt[2n]{|a_{2n}|} = \sqrt[2n]{|e^{n(1+(-1)^n)}|} = \begin{cases} e^{2n/2n} = e, & n \text{ gerade,} \\ e^{0/2n} = 1, & n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

und wegen $\sqrt[2n+1]{|a_{2n+1}|} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = e$, d. h. die Potenzreihe hat den Konvergenzradius e^{-1} . Für $x = \pm e^{-1}$ ergibt sich die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{n(1+(-1)^n)} e^{-2n}.$$

Diese Reihe ist divergent, da für gerades n gilt: $e^{n(1+(-1)^n)} e^{-2n} = e^{2n} e^{-2n} = 1 \not\rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Die Potenzreihe konvergiert daher nur für $x \in (-e^{-1}, e^{-1})$.

Bemerkung: Man kann auch $y := x^2$ setzen und $\sum_{n=1}^{\infty} e^{n(1+(-1)^n)} y^n$ betrachten. Diese Reihe hat Konvergenzradius e^{-2} , d. h. sie ist konvergent für $|y| < e^{-2}$ und divergent für $|y| > e^{-2}$. Hieraus folgt dann Konvergenz für $|x| < e^{-1}$ und Divergenz für $|x| > e^{-1}$.

- d) Für $a_n := 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ gilt offenbar $1 \leq a_n \leq n$. Wegen $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ folgt hieraus $\sqrt[n]{|a_n|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$. Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ hat also den Konvergenzradius $R = 1^{-1} = 1$. Für $|z| = 1$ konvergiert die Reihe nicht, denn dann gilt $|a_n z^n| = a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, d. h. die Reihenglieder konvergieren nicht gegen 0. Konvergenz der Reihe liegt also nur für $|z| < 1$ vor.

- e) Auch diese Potenzreihe hat den Konvergenzradius 1, denn

$$\sqrt[k]{|2^k z^{k^2}|} = \sqrt[k]{2^k} \cdot \sqrt[k]{|z|^{k^2}} = 2|z|^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \begin{cases} 0, & |z| < 1, \\ \infty, & |z| > 1. \end{cases}$$

Auf dem Rand des Konvergenzkreises liegt keine Konvergenz vor, denn für $|z| = 1$ gilt $|2^k z^{k^2}| = 2^k \rightarrow \infty$ ($k \rightarrow \infty$). Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k z^{k^2}$ konvergiert somit nur für $|z| < 1$.

- f) Für den Konvergenzradius R von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3i)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z+3i)^n$ mit $a_n := \frac{1}{n^2}$ ergibt sich wegen

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} = 1$$

$R = 1^{-1} = 1$. Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3i)^n}{n^2}$ konvergiert also für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z + 3i| < 1$ und divergiert für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z + 3i| > 1$. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z + 3i| = 1$ gilt

$$\left| \frac{(z + 3i)^n}{n^2} \right| = \frac{|z + 3i|^n}{n^2} = \frac{1}{n^2} \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}.$$

Wegen der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3i)^n}{n^2}$ für $|z + 3i| = 1$ nach dem Majorantenkriterium konvergent. Also konvergiert die Reihe genau für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z + 3i| \leq 1$.