Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. I.Anapolitanos
Dr. S. Wugalter

WS 2016//2017
08.12.2016

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

8. Übungsblatt

Aufgabe 1

Bestimmen Sie alle Lösungen $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$ der folgenden linearen Gleichungssysteme.

a)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_4 &= 3 \\ x_3 + 4x_4 &= 1 \\ x_5 &= 2 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & - & 2\,x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ 4\,x_1 & - & 8\,x_2 & + & 3\,x_3 & - & 3\,x_4 & + & x_5 & = & 2 \\ -2\,x_1 & + & 4\,x_2 & - & 2\,x_3 & - & x_4 & + & 4\,x_5 & = & -3 \\ x_1 & - & 2\,x_2 & & & - & 3\,x_4 & + & 4\,x_5 & = & -1 \end{array}$$

Aufgabe 2

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = y$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha - 1 & \beta + 2 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

und entscheiden Sie, in Abhängigkeit von den Parametern α und β, ob das Gleichungssystem lösbar ist. Berechnen Sie gegebenenfalls alle Lösungen.

Aufgabe 3

Im komplexen Vektorraum $\mathbb{C}^4$ seien der Vektor $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 5i - 1 \\ 1 - i \\ c^2 \end{pmatrix}$ und der Untervektorraum

$$U = \operatorname{lin}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 - i \\ 1 + i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ -c - i \\ c^2 + 2ci \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ i - 1 + c \\ -c - i \\ 2i \end{pmatrix} \}$$

gegeben. Bestimmen Sie alle $c \in \mathbb{C}$, für die $y \in U$ gilt.

Aufgabe 4

In einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V seien die linear unabhängigen Vektoren a_1, a_2, a_3 gegeben. Die Vektoren b_1, b_2, b_3 werden definiert durch $b_1 := (\alpha - 1)a_2 + 2a_3,\ b_2 := 2a_1 + (2\alpha - 3)a_2 + 4a_3,\ b_3 := a_1 + (\alpha - 1)a_2 + a_3$.

a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren b_1, b_2, b_3 linear unabhängig?

b) Nun sei $\alpha = 0$. Für welche β lässt sich der Vektor $x := a_1 + \beta a_2 + 2a_3$ mittels der Vektoren b_1, b_2 und b_3 darstellen? Geben Sie diese Darstellung an.

Aufgabe 5

Sei $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Berechnen Sie eine Basis von Kern A und von Bild A.

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **1, 4, 5**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.