Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. I.Anapolitanos
Dr. S. Wugalter

WS 2016/17

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 8. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_4 &= 3 \\ x_3 + 4x_4 &= 1 \\ x_5 &= 2 \end{aligned}$$

liegt bereits in Zeilennormalform vor:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

(Stellen wir uns hier das Endergebnis beim Lösungsalgorithmus vor, so wären hier womöglich noch Nullzeilen, die aber einfach ignoriert werden dürfen). Diese Treppe verläuft nicht regelmäßig. Nun verwenden wir den (-1)-Ergänzungstrick. In jeder Spalte der Koeffizientenmatrix sollte eine neue Stufe anfangen! Dies erzwingen wir, indem wir zwei Zeilen der Form $0 \dots 0 \ -1 \ 0 \dots 0$ einfügen:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Jetzt können wir die Lösung ablesen: die beiden *Spalten* mit den neu hinzugekommenen Stufen (an den -1-en erkennbar) sind eine Basis des homogenen Lösungsraums, und die letzte *Spalte* ist eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung! Laut der Vorlesung ergibt sich für die allgemeine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

Das Einfügen jener -1-Zeilen ist nichts anderes als das Setzen von freien Parametern. Betrachten wir das ursprüngliche Gleichungssystem mit Variablen

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_4 &= 3 \\ x_3 + 4x_4 &= 1 \\ x_5 &= 2\,, \end{aligned}$$

setzen zwei Parameter (aber mit Minuszeichen!)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_4 &= 3 \\ x_2 &= -\lambda \\ x_3 + 4x_4 &= 1 \\ x_4 &= -\mu \\ x_5 &= 2\,, \end{aligned}$$

lassen in jeder Zeile nur eine Variable stehen

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 + \lambda + 2\mu \\ x_2 &= -\lambda \\ x_3 &= 1 + 4\mu \\ x_4 &= -\mu \\ x_5 &= 2 \end{aligned}$$

und schreiben vektoriell

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

b) Um das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & - & 2\,x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 = & 0 \\ 4\,x_1 & - & 8\,x_2 & + & 3\,x_3 & - & 3\,x_4 & + & x_5 = & 2 \\ -2\,x_1 & + & 4\,x_2 & - & 2\,x_3 & - & x_4 & + & 4\,x_5 = & -3 \\ x_1 & - & 2\,x_2 & & & - & 3\,x_4 & + & 4\,x_5 = & -1 \end{array}$$

zu lösen, bestimmen wir die Zeilennormalform der zugehörigen erweiterten Matrix

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -8 & 3 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & -3 & 4 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_4 \to Z_4 - Z_1]{\substack{Z_2 \to Z_2 - 4Z_1 \\ Z_3 \to Z_3 + 2Z_1}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_4 \to Z_4 - Z_2]{\substack{Z_2 \to -Z_2 \\ Z_3 \to -\frac{1}{3}Z_3}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_4 \to Z_4 + 3Z_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_2 \to Z_2 + Z_3]{Z_1 \to Z_1 - Z_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

und verwenden den (-1)-Ergänzungstrick, d.h. wir lassen Nullzeilen in der Zeilennormalform weg und ergänzen Zeilen mit -1 und sonst Nullen, so dass auf der Diagonalen nur ± 1 steht:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Nun können wir die allgemeine Lösung $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$ des Gleichungssystems ablesen:

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

Aufgabe 2

Wir bringen die erweiterte Matrix $(A|y)$ durch Zeilenumformungen auf Zeilennormalform:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha-1 & \beta+2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 - Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha & \beta & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_3 \to Z_3 - \alpha Z_2]{Z_1 \to Z_1 + Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2+\alpha & 2 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \beta-\alpha^2 & 2-\alpha \end{array}\right) =: (*)$$

1\. Fall: $\beta \neq \alpha^2$. Dann setzen wir zur Abkürzung $\gamma := (2-\alpha)/(\beta-\alpha^2)$ und erhalten

$$(*) \xrightarrow{Z_3 \to (\beta-\alpha^2)^{-1} Z_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2+\alpha & 2 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \end{array}\right) \xrightarrow[Z_2 \to Z_2 - \alpha Z_3]{Z_1 \to Z_1 - (2+\alpha) Z_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2-(2+\alpha)\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 1-\alpha\gamma \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \end{array}\right)$$

Man sieht: In diesem Fall ist das Gleichungssystem $Ax = y$ eindeutig lösbar; die Lösung $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3$ ist gegeben durch $x_1 = 2 - (2+\alpha)\gamma$, $x_2 = 1 - \alpha\gamma$ und $x_3 = \gamma$.

2\. Fall: $\beta = \alpha^2$ und $\alpha \neq 2$. Dann ergibt sich

$$(*) \xrightarrow{Z_3 \to (2-\alpha)^{-1} Z_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2+\alpha & 2 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Der Rang der erweiterten Matrix ist größer als der von A. Folglich besitzt das lineare Gleichungssystem $Ax = y$ in diesem Fall keine Lösung.

3\. Fall: $\beta = \alpha^2$ und $\alpha = 2$. Dann steht die Zeilennormalform bereits da:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Der Rang der erweiterten Matrix und der Rang von A stimmen überein, das Gleichungssystem ist also lösbar. Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung $Ax = y$ ist

$$x_p = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alle Lösungen des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$ erhält man, indem man $x_3 = \lambda$ setzt [oder den (-1)-Ergänzungstrick verwendet]:

$$x_h = \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (\lambda \in \mathbb{K}).$$

Die allgemeine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems $Ax = y$ ist folglich

$$x = x_p + x_h = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (\lambda \in \mathbb{K}).$$

Aufgabe 3

Definiere

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ -1-i \\ 1+i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ -c-i \\ c^2+2ci \end{pmatrix}, \quad v_4 := \begin{pmatrix} i \\ i-1+c \\ -c-i \\ 2i \end{pmatrix}.$$

Gesucht sind alle $c \in \mathbb{C}$, für welche das lineare Gleichungssystem $\sum_{j=1}^4 x_j v_j = y$ eine Lösung $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ hat. Wir wenden Zeilenumformungen auf die erweiterte Matrix an:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & i & 1 \\ i & -1-i & -i & i-1+c & 5i-1 \\ 0 & 1+i & -c-i & -c-i & 1-i \\ 2 & 0 & c^2+2ci & 2i & c^2 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_4 \to Z_4 - 2Z_1]{Z_2 \to Z_2 - iZ_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & -1-i & -i & i+c & 4i-1 \\ 0 & 1+i & -c-i & -c-i & 1-i \\ 0 & 0 & c^2+2ci & 0 & c^2-2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3 \to Z_3 + Z_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & -1-i & -i & i+c & 4i-1 \\ 0 & 0 & -c-2i & 0 & 3i \\ 0 & 0 & c^2+2ci & 0 & c^2-2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_4 \to Z_4 + cZ_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & -1-i & -i & i+c & 4i-1 \\ 0 & 0 & -c-2i & 0 & 3i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c^2+3ci-2 \end{array}\right)$$

Dieses lineare Gleichungssystem ist unlösbar für $0 \neq c^2 + 3ci - 2 = (c+i)(c+2i)$, also für $c \in \mathbb{C} \setminus \{-2i, -i\}$. Wegen der dritten Zeile ist die Lösungsmenge auch für $c = -2i$ leer. Nur im Fall $c = -i$ ist das lineare Gleichungssystem lösbar. Fazit: Genau für $c = -i$ gilt $y \in U$.

Aufgabe 4

a) Wir untersuchen, für welche $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ man $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 = 0$ erhält. Es gilt

$$\begin{aligned} &\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 \\ &\quad = \lambda_1\big((\alpha-1)a_2 + 2a_3\big) + \lambda_2\big(2a_1 + (2\alpha-3)a_2 + 4a_3\big) + \lambda_3\big(a_1 + (\alpha-1)a_2 + a_3\big) \\ &\quad = \big(2\lambda_2 + \lambda_3\big)a_1 + \big((\alpha-1)\lambda_1 + (2\alpha-3)\lambda_2 + (\alpha-1)\lambda_3\big)a_2 + \big(2\lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3\big)a_3 . \end{aligned}$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit von a_1, a_2, a_3 wird dies genau dann $= 0$, wenn die Koeffizienten der a_1, a_2, a_3 verschwinden. Folglich gilt $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 = 0$ genau dann, wenn λ_1, λ_2 und λ_3 das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ (\alpha-1)\lambda_1 + (2\alpha-3)\lambda_2 + (\alpha-1)\lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

lösen. Die Matrix dieses homogenen linearen Gleichungssystems formen wir um:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ \alpha-1 & 2\alpha-3 & \alpha-1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Zeilen tauschen}]{Z_3\to\frac{1}{2}Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 1 \\ \alpha-1 & 2\alpha-3 & \alpha-1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[Z_1\to Z_1-Z_2,\ Z_2\to\frac{1}{2}Z_2]{Z_3\to Z_3-(\alpha-1)Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2}(\alpha-1) \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3\to Z_3+Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\alpha \end{pmatrix}$$

Man sieht: Die Matrix hat Rang 3 genau dann, wenn $\alpha \neq 0$ ist. Obiges Gleichungssystem besitzt also genau im Fall $\alpha \neq 0$ nur die triviale Lösung. Folglich sind die Vektoren b_1, b_2, b_3 genau dann linear unabhängig, wenn $\alpha \neq 0$ ist.

b) Sei $x := a_1 + \beta a_2 + 2a_3$. Wir suchen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 = x$. Wegen

$$\begin{aligned} \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 &= \lambda_1(-a_2 + 2a_3) + \lambda_2(2a_1 - 3a_2 + 4a_3) + \lambda_3(a_1 - a_2 + a_3) \\ &= (2\lambda_2 + \lambda_3)a_1 + (-\lambda_1 - 3\lambda_2 - \lambda_3)a_2 + (2\lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3)a_3 \end{aligned}$$

und der linearen Unabhängigkeit von a_1, a_2, a_3 läuft dies darauf hinaus, eine Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 2 \end{pmatrix}$$

zu bestimmen. Wir formen die erweiterte Matrix dieses Gleichungssystems um:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -1 & \beta \\ 2 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_1\leftrightarrow Z_2]{Z_3\to Z_3+2Z_2,\ Z_2\to -Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -\beta \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 2+2\beta \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_2\to\frac{1}{2}Z_2]{Z_3\to Z_3+Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -\beta \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 3+2\beta \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1\to Z_1-3Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\beta-\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 3+2\beta \end{array}\right)$$

Das System ist nur für $\beta = -\frac{3}{2}$ lösbar. Die Zeilennormalform lautet dann

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Das Gleichungssystem hat also keine eindeutige Lösung; die allgemeine Lösung lautet

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (\eta \in \mathbb{R} \text{ und } \mu = -\tfrac{1}{2}\eta).$$

Fazit: Die Darstellung des Vektors x gelingt genau dann, wenn $\beta = -\frac{3}{2}$ ist. Es gilt dann

$$x = \mu b_1 + (\tfrac{1}{2} - \mu) b_2 + 2\mu b_3 \qquad (\mu \in \mathbb{R}).$$

Aufgabe 5

Zunächst bringen wir A mittels Zeilenumformungen auf Zeilennormalform:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_1\to -\frac{1}{3}Z_1]{\substack{Z_2\to Z_2+\frac{1}{3}Z_1 \\ Z_3\to -\frac{1}{2}Z_3+\frac{1}{3}Z_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & -1/2 & -1/3 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3\to Z_3+\frac{1}{2}Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe des (-1)-Ergänzungstricks lesen wir ab:

$$\text{Kern } A = \text{lin}\{\begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ -1 \end{pmatrix}\} = \text{lin}\{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\}.$$

Folglich ist $\{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\}$ eine Basis von Kern A und es gilt dim Kern $A = 1$. Die Dimensionsformel liefert dim Bild $A = 3 - \dim \text{Kern } A = 3 - 1 = 2$. Da die beiden Vektoren $Ae_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, Ae_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in$ Bild A linear unabhängig sind, bilden diese eine Basis von Bild A, also

$$\text{Bild } A = \text{lin}\{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$