Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos
Dr S. Wugalter

WS 2016/17
16.12.2016

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

9. Übungsblatt

Aufgabe 1

Beweisen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme die folgenden Formeln für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

a) $\sin(2x) = 2\sin x \,\cos x$

b) $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

c) $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\,\cos\frac{x-y}{2}$

d) $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\,\cos\frac{x-y}{2}$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie jeweils eine Potenzreihenentwicklung der Funktion f um die angegebene Entwicklungsstelle x_0 bzw. z_0. Wie groß ist der Konvergenzradius?

a) $f(z) = \sin z, \quad z_0 = 1$

b) $f(z) = \dfrac{1-z}{1-z-2z^2}, \quad z_0 = 2$

c) $f(x) = \cos^2 x, \quad x_0 = 0$

Hinweis: Benutzen Sie in **a)** und in **c)** die Additionstheoreme für Sinus bzw. Cosinus. In **b)** hilft $\frac{1-z}{1-z-2z^2} = \frac{2/3}{1+z} + \frac{1/3}{1-2z}$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, \frac{1}{2}\}$ weiter.

Aufgabe 3

Untersuchen Sie, ob die Grenzwerte existieren, und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{42}\left(\left(1+\dfrac{42}{x}\right)^{42} - 1\right)$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+x}-2}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x}{x^2-x-6}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} \qquad (a > 0 \text{ fest})$

f) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}\right)$

h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{x}$

Aufgabe 4

a) Bestimmen Sie alle $x \in (0,\infty)$, die $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x}\,)^x$ erfüllen.

b) Zeigen Sie: Die Ungleichung $|\sin(nx)| \leqslant n|\sin x|$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathbb{R}$.

— bitte wenden —

Aufgabe 5

Die Funktion $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x) = \frac{x+2}{x+3}, \qquad x \in [0,2].$$

a) Beweisen Sie zunächst folgende Aussage: Ist eine Funktion $g : [a,b] \to [a,b]$ stetig, so gibt es mindestens ein $x_0 \in [a,b]$ mit $g(x_0) = x_0$.

b) Wenden Sie **a)** auf f an, um zu zeigen, dass ein $x_0 \in \mathbb{R}$ existiert mit $f(x_0) = x_0$.

c) Nun sei $y_0 \in [0,2]$ gegeben. Die Folge (y_n) wird rekursiv definiert durch $y_{n+1} := f(y_n)$. Konvergiert diese Folge?

Aufgabe 6

a) Es sei $a \in (0,\infty)$. Die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien definiert durch

$$x_0 := a\,, \qquad x_n := \sqrt{x_{n-1}}\,, \qquad y_n := 2^n(x_n - 1) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}\,.$$

Zeigen Sie, dass die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit Grenzwert $\ln a$.

b) Beweisen Sie für alle $x, y \in (0,\infty)$ die Abschätzung $\dfrac{\ln x + \ln y}{2} \leqslant \ln \dfrac{x+y}{2}$.

c) Zeigen Sie, dass $\ln x < x - 1$ für alle $x \in (0,\infty)$ mit $x \neq 1$ gilt.

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **3, 5 und 6**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.