

**Höhere Mathematik I für die Fachrichtung
Elektrotechnik und Informationstechnik
Lösungsvorschläge zum 9. Übungsblatt**

Aufgabe 1

- a) Das Additionstheorem $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ liefert für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$\sin(2x) = \sin(x + x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x = 2 \sin x \cos x .$$

- b) Ebenso folgt aus $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ die Gleichung

$$\cos(2x) = \cos(x + x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x ,$$

und mit der aus der Vorlesung bekannten Formel $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ergibt sich für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \begin{cases} (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x , \\ \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2 \cos^2 x - 1 . \end{cases}$$

- c) Das Additionstheorem liefert wegen $\cos(-b) = \cos b$ und $\sin(-b) = -\sin b$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos(-b) + \cos a \sin(-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b .$$

Mit $a := \frac{1}{2}(x + y)$ und $b := \frac{1}{2}(x - y)$ erhält man also

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y &= \sin(a + b) + \sin(a - b) \\ &= (\sin a \cos b + \cos a \sin b) + (\sin a \cos b - \cos a \sin b) = 2 \sin a \cos b . \end{aligned}$$

- d) Genau wie eben überlegen wir uns zunächst

$$\cos(a - b) = \cos a \cos(-b) - \sin a \sin(-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

und erhalten dann mit $a := \frac{1}{2}(x + y)$ und $b := \frac{1}{2}(x - y)$

$$\begin{aligned} \cos x + \cos y &= \cos(a + b) + \cos(a - b) \\ &= (\cos a \cos b - \sin a \sin b) + (\cos a \cos b + \sin a \sin b) = 2 \cos a \cos b . \end{aligned}$$

Aufgabe 2

- a) Wir kennen die Potenzreihen für $\sin z$ und $\cos z$ um die Entwicklungsstelle 0. In Verbindung mit dem Additionstheorem für $\sin z$ ergibt sich für jedes $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} f(z) &= \sin(1 + z - 1) = \sin(1) \cos(z - 1) + \cos(1) \sin(z - 1) \\ &= \sin(1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (z - 1)^{2k} + \cos(1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k + 1)!} (z - 1)^{2k+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - 1)^n \end{aligned}$$

mit

$$a_n = \begin{cases} \sin(1) \frac{(-1)^{n/2}}{n!} , & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \cos(1) \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n!} , & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Der Konvergenzradius der Reihe ist offensichtlich ∞ .

b) Für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, \frac{1}{2}\}$ erhalten wir unter Verwendung der Identität $\frac{1-z}{1-z-2z^2} = \frac{2/3}{1+z} + \frac{1/3}{1-2z}$

$$f(z) = \frac{2/3}{3+(z-2)} + \frac{1/3}{-3-2(z-2)} = \frac{2/9}{1+(z-2)/3} + \frac{-1/9}{1+2(z-2)/3}.$$

Für $\frac{1}{3}|z-2| < 1$ gilt

$$\frac{1}{1+(z-2)/3} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z-2}{3}\right)^n$$

und für $\frac{2}{3}|z-2| < 1$ ist

$$\frac{1}{1+2(z-2)/3} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2(z-2)}{3}\right)^n. \quad (*)$$

Hiermit folgt für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-2| < \frac{3}{2}$

$$f(z) = \frac{2}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z-2}{3}\right)^n - \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2(z-2)}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-2)^n$$

mit $a_n = \frac{2}{9}(-\frac{1}{3})^n - \frac{1}{9}(-\frac{2}{3})^n = (-\frac{1}{3})^{n+2}(2-2^n)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Der Konvergenzradius beträgt $\frac{3}{2}$, weil die geometrische Reihe in (*) für $z \in \mathbb{C}$ mit $\frac{2}{3}|z-2| \geq 1$ divergiert.

Bemerkung: Die Darstellung $\frac{1-z}{1-z-2z^2} = \frac{2/3}{1+z} + \frac{1/3}{1-2z}$ kann man auf die folgende Weise erhalten (\rightarrow Partialbruchzerlegung): Wegen $1-z-2z^2 = (1+z)(1-2z)$ machen wir den Ansatz

$$\frac{1-z}{1-z-2z^2} = \frac{a}{1+z} + \frac{b}{1-2z}$$

und müssen die Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ berechnen. Die rechte Seite dieser Gleichung liefert

$$\frac{a}{1+z} + \frac{b}{1-2z} = \frac{a(1-2z) + b(1+z)}{(1+z)(1-2z)} = \frac{a+b+(-2a+b)z}{1-z-2z^2}.$$

Die Darstellung gelingt also, wenn $a+b=1$ und $-2a+b=-1$ sind. Dies bedeutet $a = \frac{2}{3}$ und $b = \frac{1}{3}$.

c) Wegen $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$ (vgl. Aufgabe 1 b)) ergibt sich für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (2x)^{2k} = 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} 2^{2k} x^{2k} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

mit

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0 \\ 0, & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2} \frac{(-1)^{n/2}}{n!} 2^n, & \text{falls } n \geq 2 \text{ ungerade} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Der Konvergenzradius ist ∞ .

Aufgabe 3

a) Für $x \neq 1$ gilt wegen $1-x^3 = (1-x)(1+x+x^2)$ [Diese Gleichheit erhält man mit Hilfe der geometrischen Summenformel 4.11 (1) oder der Polynomdivision $(1-x^3) : (1-x)$.]

$$\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} = \frac{(1+x+x^2)-3}{1-x^3} = \frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)} = -\frac{x+2}{1+x+x^2}.$$

Damit ergibt sich für den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} -\frac{x+2}{1+x+x^2} = -\frac{1+2}{1+1+1^2} = -\frac{3}{3} = -1.$$

b) Der Binomialsatz liefert für $x \neq 0$ die Darstellung

$$\left(1 + \frac{42}{x}\right)^{42} = \sum_{k=0}^{42} \binom{42}{k} \left(\frac{42}{x}\right)^k = 1 + 42 \cdot \frac{42}{x} + a_2 \left(\frac{42}{x}\right)^2 + \dots + a_{42} \left(\frac{42}{x}\right)^{42}$$

mit $a_k := \binom{42}{k}$. Also erhalten wir

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{42} \left(\left(1 + \frac{42}{x}\right)^{42} - 1 \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{42} \left(42 \cdot \frac{42}{x} + a_2 \left(\frac{42}{x}\right)^2 + \dots + a_{42} \left(\frac{42}{x}\right)^{42} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(42 + a_2 \left(\frac{42}{x}\right)^1 + a_3 \left(\frac{42}{x}\right)^2 + \dots + a_{42} \left(\frac{42}{x}\right)^{41} \right) = 42. \end{aligned}$$

c) Setzen wir zur Abkürzung $a := \sqrt[3]{8+x}$ und $b := 2$, so ergibt sich mit der bekannten Gleichung $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ [wieder geometrische Summenformel oder Polynomdivision] die Darstellung

$$\sqrt[3]{8+x} - 2 = a - b = \frac{(\sqrt[3]{8+x})^3 - 2^3}{(\sqrt[3]{8+x})^2 + 2\sqrt[3]{8+x} + 2^2} = \frac{x}{(\sqrt[3]{8+x})^2 + 2\sqrt[3]{8+x} + 4}.$$

Folglich hat man nach Satz 8.3 und Beispiel in 8.6

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+x} - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt[3]{8+x})^2 + 2\sqrt[3]{8+x} + 4} = \frac{1}{(\sqrt[3]{8})^2 + 2\sqrt[3]{8} + 4} = \frac{1}{12}.$$

d) Dieser Grenzwert existiert nicht. Der Zähler des Bruchs hat in $x = 3$ nämlich keine Nullstelle, und wegen $(x^2 - x)/(x + 2) \rightarrow 6/5$ für $x \rightarrow 3$ gilt

$$\frac{x^2 - x}{x^2 - x - 6} = \frac{1}{x - 3} \cdot \frac{x^2 - x}{x + 2} \rightarrow \begin{cases} +\infty & \text{für } x \rightarrow 3+, \\ -\infty & \text{für } x \rightarrow 3-. \end{cases}$$

e) Sei $a \in (0, \infty)$. Für $a \neq 1$ ergibt sich

$$\frac{a^x - 1}{x} = \frac{e^{x \ln a} - 1}{x} = \frac{e^{x \ln a} - 1}{x \ln a} \cdot \ln a \xrightarrow{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} \cdot \ln a \stackrel{(*)}{=} \ln a.$$

Die Gleichheit in (*) folgt sofort aus der Definition von e^y .

Für $a = 1$ gilt stets $a^x - 1 = 0$, also ist auch in diesem Falle der Grenzwert $0 = \ln a$.

f) Für alle $x \geq 1$ gilt

$$\sqrt{x \pm 1} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x \pm 1})^2 - (\sqrt{x})^2}{\sqrt{x \pm 1} + \sqrt{x}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{x \pm 1} + \sqrt{x}},$$

und damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x} &= \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x} - (\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x-1} + \sqrt{x})} = \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x-1} + \sqrt{x})} \\ &= \frac{(x-1) - (x+1)}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x-1} + \sqrt{x})(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1})}. \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow \infty} x^{3/2} \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^{3/2}}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x-1} + \sqrt{x})(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2}{(\sqrt{1+1/x} + 1)(\sqrt{1-1/x} + 1)(\sqrt{1-1/x} + \sqrt{1+1/x})} = \frac{-2}{2 \cdot 2 \cdot 2} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

g) Mit der Reihenentwicklung von $\sin x$ hat man für jedes $x \neq 0$

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \frac{x - (x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots)}{x(x - \frac{1}{3!}x^3 + \dots)} = \frac{\frac{1}{3!}x^3 - \frac{1}{5!}x^5 + \dots}{x^2 - \frac{1}{3!}x^4 + \dots},$$

und hieraus folgt wegen der Stetigkeit von Potenzreihen (vgl. Satz 8.7)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3!}x^3 - \frac{1}{5!}x^5 + \dots}{x^2 - \frac{1}{3!}x^4 + \dots} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3!} - \frac{1}{5!}x^2 + \dots}{1 - \frac{1}{3!}x^2 + \dots} = \frac{\frac{1}{3!}}{1} = \frac{1}{6}.$$

h) Wir erhalten wegen $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x}.$$

Bei dieser Umformung muss man beachten, dass aus $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ insbesondere folgt, dass $\sin x \neq 0$ in der Nähe von $x_0 = 0$ gilt.

Für jede Folge (x_n) mit $x_n \rightarrow 0$ und $x_n \neq 0$ hat man also $\sin x_n \rightarrow 0$ und $\sin x_n \neq 0$ für fast alle n . Daher folgt aus $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$

$$\frac{e^{\sin x_n} - 1}{\sin x_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Demnach existiert der zu untersuchende Grenzwert: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x} = 1$.

Aufgabe 4

a) Sei $x > 0$. Wegen der Injektivität von $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ist die gegebene Gleichung $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$ äquivalent zu

$$\ln(x^{\sqrt{x}}) = \ln((\sqrt{x})^x) \Leftrightarrow \sqrt{x} \ln x = x \ln \sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x} \ln x = \frac{1}{2}x \ln x \Leftrightarrow (\sqrt{x} - \frac{1}{2}x) \ln x = 0.$$

Diese Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn $\ln x = 0$ (also $x = 1$) oder wenn $\sqrt{x} = \frac{1}{2}x$ gilt. Aus Letzterem folgt $x = \frac{1}{4}x^2$ und damit $x(1 - \frac{1}{4}x) = 0$, also $x = 4$. (Man beachte $x > 0$.) Somit gilt $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$ genau für $x = 1$ oder $x = 4$.

b) Sei $x \in \mathbb{R}$. Wir zeigen $|\sin(nx)| \leq n|\sin x|$ mittels vollständiger Induktion nach $n \in \mathbb{N}$.

IA: Für $n = 1$ ist die Abschätzung trivial: $|\sin(1 \cdot x)| \leq 1 \cdot |\sin x|$.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte $|\sin(nx)| \leq n|\sin x|$ (IV). Dann folgt mit Hilfe des Additionstheorems für Sinus

$$\begin{aligned} |\sin((n+1)x)| &= |\sin(nx) \cos(x) + \cos(nx) \sin(x)| \leq |\sin(nx)| \cdot |\cos x| + |\cos(nx)| \cdot |\sin x| \\ &\stackrel{(**)}{\leq} |\sin(nx)| + |\sin x| \stackrel{\text{IV}}{\leq} n|\sin x| + |\sin x| = (n+1)|\sin x|. \end{aligned}$$

In (**) verwendeten wir $|\cos y| \leq 1$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Dies, wie auch $|\sin y| \leq 1$, folgt sofort aus der Identität $(\sin y)^2 + (\cos y)^2 = 1$ für alle $y \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 5

a) Wir definieren die Funktion $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ durch $h(x) := x - g(x)$. Dann ist h als Komposition stetiger Funktionen stetig. Wegen $g([a, b]) \subset [a, b]$ gilt $h(a) = a - g(a) \leq a - a = 0$ und $h(b) = b - g(b) \geq b - b = 0$. Daher liegt $y_0 := 0$ zwischen den Funktionswerten $h(a)$ und $h(b)$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es (mind.) ein $x_0 \in [a, b]$ mit $h(x_0) = 0$, d.h. $g(x_0) = x_0$.

b) Auf dem Intervall $[0, 2]$ ist f stetig. Zudem ist für $x \geq 0$ offenbar $f(x) \geq 0$ und $f(x) = \frac{x+3-1}{x+3} = 1 - \frac{1}{x+3} \leq 1$. Deshalb gilt für die stetige Funktion $f : [0, 2] \rightarrow [0, 2]$ gemäß **a)**: Es gibt (mindestens) ein $x_0 \in [0, 2]$ mit $f(x_0) = x_0$. (Solch ein x_0 heißt *Fixpunkt* von f .)

- c) Wir verifizieren zunächst, dass die Funktion $f : [0, 2] \rightarrow [0, 2]$ monoton wachsend ist. Für alle $x, y \in [0, 2]$ gilt nämlich

$$x \leq y \Rightarrow \frac{1}{x+3} \geq \frac{1}{y+3} \Rightarrow 1 - \frac{1}{x+3} \leq 1 - \frac{1}{y+3} \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

Nun zeigen wir, dass die Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, definiert durch $y_0 \in [0, 2]$ und $y_n := f(y_{n-1})$ für $n \in \mathbb{N}$, monoton ist. Dazu unterscheiden wir zwei Fälle:

Fall $y_0 \leq f(y_0)$: Die Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist monoton wachsend, d.h. $\forall n \in \mathbb{N} : y_{n-1} \leq y_n$. Denn:

IA: $n = 1$. Es ist $y_0 \leq f(y_0) = y_1$.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gelte $y_{n-1} \leq y_n$ (IV). Da f monoton wachsend ist, folgt

$$y_n = f(y_{n-1}) \stackrel{\text{IV}}{\leq} f(y_n) = y_{n+1}.$$

Fall $y_0 > f(y_0)$: Die Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist monoton fallend, d.h. $\forall n \in \mathbb{N} : y_{n-1} \geq y_n$.

Dies kann man ähnlich wie eben durch vollständige Induktion beweisen.

Außerdem gilt $y_0 \in [0, 2]$ und $y_n = f(y_{n-1}) \in [0, 2]$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also ist $(y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ beschränkt.

Die beschränkte und monotone Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert nach Satz 6.4.

Bemerkung: Macht man in der Rekursionsformel $y_{n+1} = f(y_n)$ den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ (und beachtet dabei die Stetigkeit von f), so ergibt sich für den Grenzwert a der Folge (y_n) die Gleichung

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = f(a),$$

d.h. a ist Fixpunkt von f . Rechnen wir a aus: Es gilt $a = \frac{a+2}{a+3}$. Nach Multiplikation mit $a+3$ erhält man die quadratische Gleichung $a^2 + 2a - 2 = 0$ in a , die genau für $a = -1 + \sqrt{3}$ oder $a = -1 - \sqrt{3}$ erfüllt ist. Wegen $y_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ muss $a \geq 0$ gelten, also $a = -1 + \sqrt{3}$.

Aufgabe 6

- a) Sei $a \in (0, \infty)$. Definitionsgemäß gilt

$$x_0 = a, \quad x_1 = a^{1/2}, \quad x_2 = (a^{1/2})^{1/2} = a^{1/4}, \quad x_3 = (a^{1/4})^{1/2} = a^{1/8}, \quad \dots$$

Mit vollständiger Induktion beweisen wir $x_n = a^{1/2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

IA: $n = 0$. Nach Definition ist $x_0 = a$.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Es gelte $x_n = a^{1/2^n}$ (IV). Dann folgt

$$x_{n+1} = x_n^{1/2} \stackrel{\text{IV}}{=} (a^{1/2^n})^{1/2} = a^{1/2^{n+1}}.$$

Damit erhalten wir für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$y_n = 2^n(x_n - 1) = \frac{a^{1/2^n} - 1}{1/2^n}.$$

Wie wir in Aufgabe 3 e) gesehen haben, gilt $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$. Wegen $1/2^n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{1/2^n} - 1}{1/2^n} = \ln a$.

- b) Seien $x, y \in (0, \infty)$. Da die Exponentialfunktion $E : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ streng monoton wachsend ist, ist die zu beweisende Ungleichung $\frac{\ln x + \ln y}{2} \leq \ln \frac{x+y}{2}$ äquivalent zu

$$E\left(\frac{\ln x + \ln y}{2}\right) \leq E\left(\ln \frac{x+y}{2}\right).$$

Weil \ln die Umkehrfunktion von E ist, ergibt sich hier auf der linken Seite

$$E\left(\frac{\ln x + \ln y}{2}\right) = \sqrt{E(\ln x + \ln y)} = \sqrt{E(\ln x) E(\ln y)} = \sqrt{xy},$$

und auf der rechten Seite erhält man $\frac{x+y}{2}$. Also müssen wir lediglich

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

beweisen. Dies folgt mit der binomischen Formel:

$$\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{(\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{xy} + (\sqrt{y})^2}{2} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{2} \geq 0.$$

- c) Um $\ln x < x - 1$ für alle $x \in (0, \infty)$ mit $x \neq 1$ zu beweisen, verwenden wir, dass die Exponentialfunktion $E: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ streng monoton wachsend ist, und erhalten

$$\ln x < x - 1 \iff E(\ln x) < E(x - 1) \iff x < E(x - 1).$$

Für $x > 1$ gilt wegen $x - 1 > 0$

$$E(x - 1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x - 1)^n}{n!} > \frac{(x - 1)^0}{0!} + \frac{(x - 1)^1}{1!} = 1 + (x - 1) = x.$$

Für $x \in (0, 1)$ erhält man wegen $1 - x \in (0, 1)$

$$E(1 - x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - x)^n}{n!} < \sum_{n=0}^{\infty} (1 - x)^n = \frac{1}{1 - (1 - x)} = \frac{1}{x}.$$

Hieraus folgt dann

$$E(x - 1) = \frac{1}{E(1 - x)} > \frac{1}{1/x} = x.$$