Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos
Dr S. Wugalter

WS 2016/17
21.12.2016

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

10. Übungsblatt

Aufgabe 1

Bestimmen Sie alle Stetigkeitsstellen der folgenden Funktionen:

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3} & \text{für } x \notin \{1,3\} \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = 1 \\ 0 & \text{für } x = 3 \end{cases}$

b) $f\colon [-7,3] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \min\{x^2+2x-15,\ x^3\} & \text{für } x \in [-7,-5] \cup [-1,3] \\ x+5 & \text{für } x \in (-5,-1) \end{cases}$

Aufgabe 2

Die Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} & \text{für } 0 < |x| \leqslant 1 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}.$$

a) Zeigen Sie, dass f stetig ist.

b) Bestimmen Sie den Wertebereich $f([-1,1])$ von f.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $|f(x)| \leqslant 1$ für alle $x \in [-1,1]$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass f eine Umkehrfunktion besitzt. Berechnen Sie f^{-1}.

d) Beweisen Sie, dass f^{-1} streng monoton wachsend ist.

e) Ist f streng monoton wachsend? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3

Zeigen Sie die Identitäten

a) $\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x, y, x+y \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$;

b) $\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|\arctan x + \arctan y| < \frac{\pi}{2}$;

c) $\big(\cosh x + \sinh x\big)^n = \cosh(nx) + \sinh(nx)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4

a) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die gilt

$$2^{x-1} + 3^{x+1} = 2^{x+4} + 3^{x-1} .$$

b) Beweisen Sie

$$\log_2\big(\sqrt{7} - \sqrt{3}\big) = 2 - \log_2\big(\sqrt{7} + \sqrt{3}\big) .$$

Aufgabe 5

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin(x^{-1}) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Untersuchen Sie, welche dieser Funktionen an der Stelle 0 stetig sind und welche dort differenzierbar sind.

Aufgabe 6

Seien $\alpha > 1$ und $C > 0$. Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfülle

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C\,|x - y|^\alpha \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R} .$$

Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist und $f'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **2, 3a),3b),4a),5 und 6**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.