Karlsruhe Institut für Technologie (KIT) WS 2016/17
Institut für Analysis 13.01.2017
Dr. I. Anapolitanos
Dr S. Wugalter

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

11. Übungsblatt

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen.

a) $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^{\sqrt[3]{x}}$

b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos(2x)\, e^{\sin x}$

c) $f\colon (1,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(\ln x)$

d) $f\colon (0,\pi) \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^{\sin x}\,(\sin x)^x$

Aufgabe 2

a) Berechnen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes die folgenden Grenzwerte.

i) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$

ii) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x-1}\,\right)$

b) Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes die folgende Abschätzung

$$x\ln x - y\ln y \leqslant (x-y)(1+\ln x) \qquad \text{für } x>y>0\,.$$

Aufgabe 3

Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ und entscheiden Sie, welche der beiden Zahlen e^{π}, π^{e} die größere ist.

Aufgabe 4

Beweisen Sie, dass die folgenden Funktionen konstant sind, und bestimmen Sie die jeweilige Konstante.

a) $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \arctan(x) + \arctan(x^{-1})$

b) $g\colon [0,\pi/2] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \arcsin(\cos x) - \arccos(\sin x)$

Aufgabe 5

Die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ist gegeben durch $f(x) := 1 - 8(e^{2x}+4)^{-1}$.

a) Beweisen Sie, dass f injektiv ist, und zeigen Sie $f'(x) = 1-(f(x))^2$ für alle $x\in\mathbb{R}$.

b) Berechnen Sie damit die Ableitung der Umkehrfunktion von f.

c) Bestimmen Sie eine explizite Darstellung von f^{-1} und berechnen Sie damit erneut die Ableitung von f^{-1}.

d) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente von f in $x_0 = 0$ sowie die Gleichung der Tangente von f^{-1} in $y_0 = -\frac{3}{5}$.

— bitte wenden —

Aufgabe 6

Berechnen Sie Maximum und Minimum der Funktionen

a) $f\colon [-3,2] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^4 - 4x^2 + 2\,;$

b) $g\colon [0,10] \to \mathbb{R},\ x \mapsto -6x + (|x-3|+2)^2\,.$

Aufgabe 7

a) Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_4(f;0)$ von $f\colon x \mapsto \ln(1+x)$ und zeigen Sie

$$0 \leqslant \ln(1+x) - T_4(f;0)(x) \leqslant \tfrac{1}{5}\,x^5 \qquad \text{für alle } x \geqslant 0\,.$$

b) Bestimmen Sie Zahlen a, b und c, für die gilt:

$$|\ln(2+x) - a - bx| \leqslant c\,x^2 \qquad \text{für alle } x \in [-1,1]\,.$$

c) Approximieren Sie die Funktion $f(x) := e^{-x} + \frac{1}{1+x}$ durch das Taylorpolynom $T_2(f;\frac{1}{2})$ und geben Sie eine Konstante $C > 0$ an so, dass für alle $x \in [0,1]$ gilt:

$$|f(x) - T_2(f;\tfrac{1}{2})(x)| \leqslant C\,|x - \tfrac{1}{2}|^3\,.$$

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **1, 2, 6 und 7**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.