Karlsruhe Institut für Technologie (KIT) WS 2016/17
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos
Dr. S. Wugalter

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 11. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Nach Definition gilt $f(x) = x^{\sqrt[3]{x}} = e^{\ln(x)\cdot\sqrt[3]{x}}$ für jedes $x > 0$.

Ist $g\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln(x)\sqrt[3]{x}$ gesetzt, so ist $f(x) = e^{g(x)} = E(g(x))$. Die Kettenregel liefert

$$f'(x) = E'(g(x))\,g'(x) = E(g(x))\,g'(x) = f(x)\,g'(x)\,, \qquad x \in (0,\infty)\,.$$

Weiter gilt nach der Produktregel

$$g'(x) = \ln'(x)\,\sqrt[3]{x} + \ln(x)\,(x^{1/3})' = \frac{1}{x}\sqrt[3]{x} + \ln(x)\,\frac{1}{3}\,x^{-2/3} = \frac{\sqrt[3]{x}\,(3+\ln(x))}{3x}\,, \qquad x \in (0,\infty)\,,$$

also

$$f'(x) = \frac{\sqrt[3]{x}\,(3+\log(x))}{3x}\,f(x)\,, \qquad x \in (0,\infty)\,.$$

b) Anwendung der Produkt- und Kettenregel liefert für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = -2\sin(2x)\,e^{\sin x} + \cos(2x)\,e^{\sin x}\cos x = \big(\cos(2x)\,\cos x - 2\sin(2x)\big)\,e^{\sin x}\,.$$

c) Mit Hilfe der Kettenregel erhält man für jedes $x \in (1,\infty)$

$$f'(x) = \ln'(\ln x)\,\ln'(x) = \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}\,.$$

d) Für jedes $x \in (0,\pi)$ gilt [Man beachte $\sin x > 0$ für alle $x \in (0,\pi)$.]

$$f(x) = x^{\sin x}\,(\sin x)^x = e^{\ln(x)\cdot\sin x}\cdot e^{\ln(\sin x)\cdot x} = e^{\ln(x)\cdot\sin x+\ln(\sin x)\cdot x} = E(\ln(x)\cdot\sin x+\ln(\sin x)\cdot x)\,.$$

Mehrmalige Anwendung der Ketten- und Produktregel ergibt für jedes $x \in (0,\pi)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= E'(\ln(x)\cdot\sin x + \ln(\sin x)\cdot x)\cdot(\ln(x)\cdot\sin x + \ln(\sin x)\cdot x)' \\ &= E(\ln(x)\cdot\sin x + \ln(\sin x)\cdot x)\cdot\Big(\frac{1}{x}\sin x + \ln(x)\cos(x) + \frac{\cos x}{\sin x}\,x + \ln(\sin x)\Big) \\ &= x^{\sin x}\,(\sin x)^x\Big(\frac{\sin x}{x} + \ln(x)\cos(x) + \frac{x}{\tan x} + \ln(\sin x)\Big)\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 2

a) i) Wir betrachten die differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) := \cos x$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es zu jedem $x > 0$ ein $\xi \in (0,x)$ mit

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(\xi)\,, \qquad \text{d.h.} \qquad \frac{\cos x - 1}{x} = -\sin\xi\,.$$

Speziell zu $x_n := \frac{1}{n}$ existiert ein solches $\xi_n \in (0,\frac{1}{n})$. Dann gilt $\xi_n \to 0$ für $n \to \infty$ und

$$n\big(1-\cos\tfrac{1}{n}\big) = \frac{1-\cos x_n}{x_n} = \sin\xi_n \xrightarrow{n\to\infty} \sin 0 = 0\,, \qquad \text{da sin in 0 stetig ist.}$$

ii) Hier betrachten wir die Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R},\ y \mapsto \cos\sqrt{y}$. Die Kettenregel liefert, dass f auf $(0,\infty)$ differenzierbar ist mit $f'(y) = \frac{-\sin\sqrt{y}}{2\sqrt{y}}$ für alle $y > 0$. Nach dem Mittelwertsatz existiert zu jedem $x > 1$ ein $\xi_x \in (x-1, x+1)$ mit

$$\frac{f(x+1) - f(x-1)}{(x+1) - (x-1)} = f'(\xi_x)\,, \qquad \text{d.h.} \qquad \frac{\cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x-1}}{2} = \frac{-\sin\sqrt{\xi_x}}{2\sqrt{\xi_x}}\,.$$

Hieraus ergibt sich die Abschätzung

$$\left|\cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x-1}\right| = \left|\frac{\sin\sqrt{\xi_x}}{\sqrt{\xi_x}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\xi_x}} \overset{\xi_x \in (x-1,x+1)}{\leqslant} \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,.$$

Wegen $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = 0$ ist der zu bestimmende Grenzwert 0.

b) Für $t > 0$ setzen wir $f(t) := t\ln t$. Dann ist f differenzierbar mit $f'(t) = 1\cdot\ln t + t\cdot\frac{1}{t} = 1 + \ln t$. Zu $x > y > 0$ existiert gemäß Mittelwertsatz ein $\xi \in (y,x)$ mit

$$x\ln x - y\ln y = (x-y)f'(\xi) = (x-y)(1+\ln\xi) \leqslant (x-y)(1+\ln x)\,.$$

Aufgabe 3

Die Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ ist auf $(0,\infty)$ differenzierbar. Um das Monotonieverhalten von f zu untersuchen, betrachten wir f'. Für jedes $x > 0$ gilt

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - (\ln x)\cdot 1}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2} \quad \begin{cases} > 0 & \text{für } x < e, \\ < 0 & \text{für } x > e. \end{cases}$$

Somit ist f auf $\begin{cases} (0,e) \\ (e,\infty) \end{cases}$ streng monoton $\begin{cases} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{cases}$. Für $x, y \in (0,\infty)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} x^y > y^x \quad &\Longleftrightarrow \quad e^{y\cdot\ln(x)} > e^{x\cdot\ln(y)} \quad \overset{\text{Exp.fkt. streng mon. wachsend}}{\Longleftrightarrow} \quad y\cdot\ln(x) > x\cdot\ln(y) \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{\ln(x)}{x} > \frac{\ln(y)}{y} \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) > f(y)\,. \end{aligned}$$

Da $\pi > e$ und f auf (e,∞) streng monoton fallend ist, folgt $f(\pi) < f(e)$. Deshalb liefert obige Äquivalenzkette $e^\pi > \pi^e$.

Aufgabe 4

a) Nach der Kettenregel ist die Funktion f auf $(0,\infty)$ differenzierbar und für alle $x > 0$ gilt

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(x^{-1})^2}\cdot\left(-x^{-2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0\,.$$

Da die Ableitung von f auf $(0,\infty)$ verschwindet, ist f dort konstant. Für alle $x > 0$ gilt

$$f(x) = f(1) = 2\arctan(1) = 2\cdot\tfrac{\pi}{4} = \tfrac{\pi}{2}\,.$$

b) Auf den gedruckten Übungsblättern hat sich leider ein Vorzeichenfehler eingeschlichen. Korrekt muss die Definition von g lauten: $g\colon [0,\pi/2] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \arcsin(\cos x) - \arccos(\sin x)$.

Auf $(0,\pi/2)$ ist g differenzierbar mit

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(x)}}\cdot(-\sin x) - \frac{-1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}}\cdot\cos x \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sin^2(x)}}\cdot(-\sin x) - \frac{-1}{\sqrt{\cos^2(x)}}\cdot\cos x = \frac{-\sin x}{|\sin(x)|} + \frac{\cos x}{|\cos(x)|} \\ &= -1 + 1 = 0\,, \qquad \text{da } \sin x > 0, \cos x > 0 \text{ für alle } x \in (0,\pi/2)\,. \end{aligned}$$

Folglich ist g auf $(0,\pi/2)$ konstant mit

$$g(x) = g(\pi/4) = \arcsin(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}) - \arccos(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}) = \pi/4 - \pi/4 = 0 \qquad \text{für alle } x \in (0,\pi/2)\,.$$

Außerdem sind

$$\begin{aligned} g(0) &= \arcsin(1) - \arccos(0) = \pi/2 - \pi/2 = 0\,, \\ g(\pi/2) &= \arcsin(0) - \arccos(1) = 0 - 0 = 0\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 5

a) Es gilt $f'(x) = 8(e^{2x}+4)^{-2} \cdot 2e^{2x} = 16e^{2x}(e^{2x}+4)^{-2} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$; also ist f streng monoton wachsend und damit injektiv. Wegen

$$\begin{aligned} 1-(f(x))^2 &= 1 - \big(1 - 8(e^{2x}+4)^{-1}\big)^2 = 1 - \big(1 - 16(e^{2x}+4)^{-1} + 64(e^{2x}+4)^{-2}\big) \\ &= 16(e^{2x}+4)^{-1} - 64(e^{2x}+4)^{-2} = 16(e^{2x}+4)^{-2}\big((e^{2x}+4)-4\big) = 16e^{2x}(e^{2x}+4)^{-2} \end{aligned}$$

gilt auch die behauptete Gleichung.

b) f hat als Bildbereich $(-1,1)$, denn $x \mapsto (e^{2x}+4)^{-1}$ hat als Bildbereich $(0,\frac{1}{4})$. Da stets $f'(x) \neq 0$ gilt, liefert der Satz über die Umkehrfunktion, dass $f^{-1}\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist mit

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \overset{\text{a)}}{=} \frac{1}{1-(f(f^{-1}(y)))^2} = \frac{1}{1-y^2} \qquad \text{für alle } y \in (-1,1)\,.$$

c) Wir lösen $f(x) = y$ nach x auf:

$$\begin{aligned} 1 - 8(e^{2x}+4)^{-1} = y \iff (1-y)^{-1} = \tfrac{1}{8}(e^{2x}+4) &\iff 8(1-y)^{-1} - 4 = e^{2x} \\ &\iff x = \tfrac{1}{2}\ln\big(8(1-y)^{-1} - 4\big)\,. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für jedes $y \in (-1,1)$

$$(f^{-1})'(y) = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{8(1-y)^{-1} - 4} \cdot \frac{8}{(1-y)^2} = \frac{4}{8(1-y) - 4(1-y)^2} = \frac{4}{4-4y^2} = \frac{1}{1-y^2}\,.$$

d) Es gilt $f(0) = 1 - \frac{8}{5} = -\frac{3}{5}$, $f'(0) = 1 - (-\frac{3}{5})^2 = \frac{16}{25}$, $f^{-1}(-\frac{3}{5}) = 0$ und $(f^{-1})'(-\frac{3}{5}) = \frac{25}{16}$.

$$T(x) = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0), \qquad \text{also} \qquad T(x) = \tfrac{16}{25}x - \tfrac{3}{5}$$

ist die Gleichung der Tangente an das Schaubild von f in $x_0 = 0$. Die Tangente an das Schaubild von f^{-1} in $y_0 = -\frac{3}{5}$ hat die Gleichung

$$T(y) = (f^{-1})'(y_0)(y-y_0) + f^{-1}(y_0), \qquad \text{also} \qquad T(y) = \tfrac{25}{16}y + \tfrac{15}{16}\,.$$

Aufgabe 6

a) Die Funktion f ist auf dem gesamten Intervall $[-3,2]$ differenzierbar. In jeder Maximum- oder Minimumstelle im Innern des Intervalls verschwindet daher die Ableitung von f. Es gilt

$$f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2-2)\,.$$

Die Nullstellen von f' lauten 0 und $\pm\sqrt{2}$. Wir müssen neben diesen drei Stellen (die alle im Intervall $[-3,2]$ liegen!) auch die Ränder des Intervalls $[-3,2]$ untersuchen: $f(0) = 2$, $f(\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}) = -2$, $f(-3) = 47$, $f(2) = 2$. Das Maximum von f ist folglich 47, das Minimum ist -2.

b) Die Funktion g ist außer in 3 differenzierbar. Wir müssen also die Randpunkte von $[0,10]$, den Punkt 3 sowie alle Punkte im Innern von $[0,10] \setminus \{3\}$ untersuchen, an denen die Ableitung von g verschwindet. Auf $[0,3]$ gilt

$$g(x) = -6x + (3-x+2)^2 = -6x + (5-x)^2 = x^2 - 16x + 25\,, \qquad \text{also } g'(x) = 2x - 16\,.$$

$g'(x) = 0$ gilt nur für $x = 8 \notin [0,3]$. Also hat g' in $[0,3]$ keine Nullstelle. Auf $[3,10]$ gilt

$$g(x) = -6x + (x-1)^2 = x^2 - 8x + 1\,, \qquad \text{also } g'(x) = 2x - 8\,.$$

$g'(x) = 0$ gilt nur für $x = 4 \in (3,10)$. Wir müssen also die Punkte $0, 3, 4, 10$ untersuchen: $g(0) = 25$, $g(3) = -14$, $g(4) = -15$, $g(10) = 21$. Damit ist -15 das Minimum und 25 das Maximum von g.

Aufgabe 7

a) Die durch $f(x) := \ln(1+x)$ definierte Funktion $f\colon (-1,\infty) \to \mathbb{R}$ ist beliebig oft differenzierbar. Wegen

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}\,, \qquad f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}\,, \qquad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}\,, \qquad f''''(x) = \frac{-6}{(1+x)^4}\,,$$
$$f^{(5)}(x) = \frac{24}{(1+x)^5}$$

sind

$$f(0) = 0\,, \qquad f'(0) = 1\,, \qquad f''(0) = -1\,, \qquad f'''(0) = 2\,, \qquad f''''(0) = -6$$

und für das Taylorpolynom $T_4(f;0)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} T_4(f;0)(x) &= \sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k = 0 + x + \tfrac{1}{2!}\,(-1)x^2 + \tfrac{1}{3!}\,2x^3 + \tfrac{1}{4!}\,(-6)x^4 \\ &= x - \tfrac{1}{2}\,x^2 + \tfrac{1}{3}\,x^3 - \tfrac{1}{4}\,x^4\,. \end{aligned}$$

Sei $x \geqslant 0$. Um die Abschätzung $0 \leqslant \ln(1+x) - T_4(f;0)(x) \leqslant \frac{1}{5}\,x^5$ zu zeigen, verwenden wir den Satz von Taylor. Dieser besagt, dass es ein ξ zwischen 0 und x gibt mit

$$f(x) = T_4(f;0)(x) + \frac{f^{(4+1)}(\xi)}{(4+1)!}\,(x-0)^{4+1}\,,$$

also mit

$$f(x) - T_4(f;0)(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\,x^5\,.$$

Somit reicht es, die Abschätzung $0 \leqslant \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\,x^5 \leqslant \frac{1}{5}\,x^5$ einzusehen. Diese ist erfüllt, denn:

$$\begin{aligned} \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\,x^5 &= \frac{1}{5!}\cdot\frac{24}{(1+\xi)^5}\,x^5 \geqslant 0\,, \\ \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\,x^5 &= \frac{1}{5!}\cdot\frac{24}{(1+\xi)^5}\,x^5 \leqslant \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(1+0)^5}\,x^5 = \frac{1}{5}\,x^5\,. \end{aligned}$$

b) Für die durch $f(x) := \ln(2+x)$ gegebene Funktion $f\colon (-2,\infty) \to \mathbb{R}$, die beliebig oft differenzierbar ist, gilt

$$f'(x) = \frac{1}{2+x}\,, \qquad f''(x) = -\frac{1}{(2+x)^2}\,.$$

Also haben wir $f(0) = \ln 2$ und $f'(0) = \frac{1}{2}$. Nach dem Satz von Taylor gibt es zu jedem $x \in [-1,1]$ ein ξ zwischen 0 und x mit

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2!}\,x^2 = \ln 2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2(2+\xi)^2}\,.$$

Daher gilt wegen $\xi \in [-1,1]$

$$\left|f(x) - \ln 2 - \frac{x}{2}\right| = \left|\frac{x^2}{2(2+\xi)^2}\right| \leqslant \frac{x^2}{2(2-1)^2} = \frac{x^2}{2}\,.$$

Wir können somit $a = \ln 2$ und $b = c = \frac{1}{2}$ wählen.

c) Die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{-x} + \frac{1}{1+x}$ ist beliebig oft differenzierbar mit

$$f'(x) = -e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^2}\,, \qquad f''(x) = e^{-x} + \frac{2}{(1+x)^3}\,, \qquad f'''(x) = -e^{-x} - \frac{6}{(1+x)^4}\,.$$

Daher sind

$$f(\tfrac{1}{2}) = e^{-1/2} + \tfrac{2}{3}\,, \qquad f'(\tfrac{1}{2}) = -e^{-1/2} - \tfrac{4}{9}\,, \qquad f''(\tfrac{1}{2}) = e^{-1/2} + 2\cdot\tfrac{8}{27} = e^{-1/2} + \tfrac{16}{27}$$

und das Taylorpolynom $T_2(f;\frac{1}{2})$ lautet

$$\begin{aligned} T_2(f;\tfrac{1}{2})(x) &= \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(\frac{1}{2})}{k!}(x-\tfrac{1}{2})^k = f(\tfrac{1}{2}) + f'(\tfrac{1}{2})(x-\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}f''(\tfrac{1}{2})(x-\tfrac{1}{2})^2 \\ &= e^{-1/2} + \tfrac{2}{3} + (-e^{-1/2} - \tfrac{4}{9})(x-\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}(e^{-1/2} + \tfrac{16}{27})(x-\tfrac{1}{2})^2\,. \end{aligned}$$

Sei $x \in [0,1]$. Nach dem Satz von Taylor existiert ein ξ zwischen $\frac{1}{2}$ und x mit

$$f(x) = T_2(f;\tfrac{1}{2})(x) + \frac{f^{(2+1)}(\xi)}{(2+1)!}(x-\tfrac{1}{2})^{2+1}\,,$$

also mit

$$\left|f(x) - T_2(f;\tfrac{1}{2})(x)\right| = \frac{|f'''(\xi)|}{3!}\,|x-\tfrac{1}{2}|^3\,.$$

Wegen $\xi \geqslant 0$ ergibt sich

$$\frac{|f'''(\xi)|}{3!} = \frac{1}{6}\Big(e^{-\xi} + \frac{6}{(1+\xi)^4}\Big) = \frac{e^{-\xi}}{6} + \frac{1}{(1+\xi)^4} \leqslant \frac{1}{6} + \frac{1}{(1+0)^4} = \frac{7}{6}\,;$$

demnach gilt die gewünschte Abschätzung z.B. mit $C = \frac{7}{6}$.